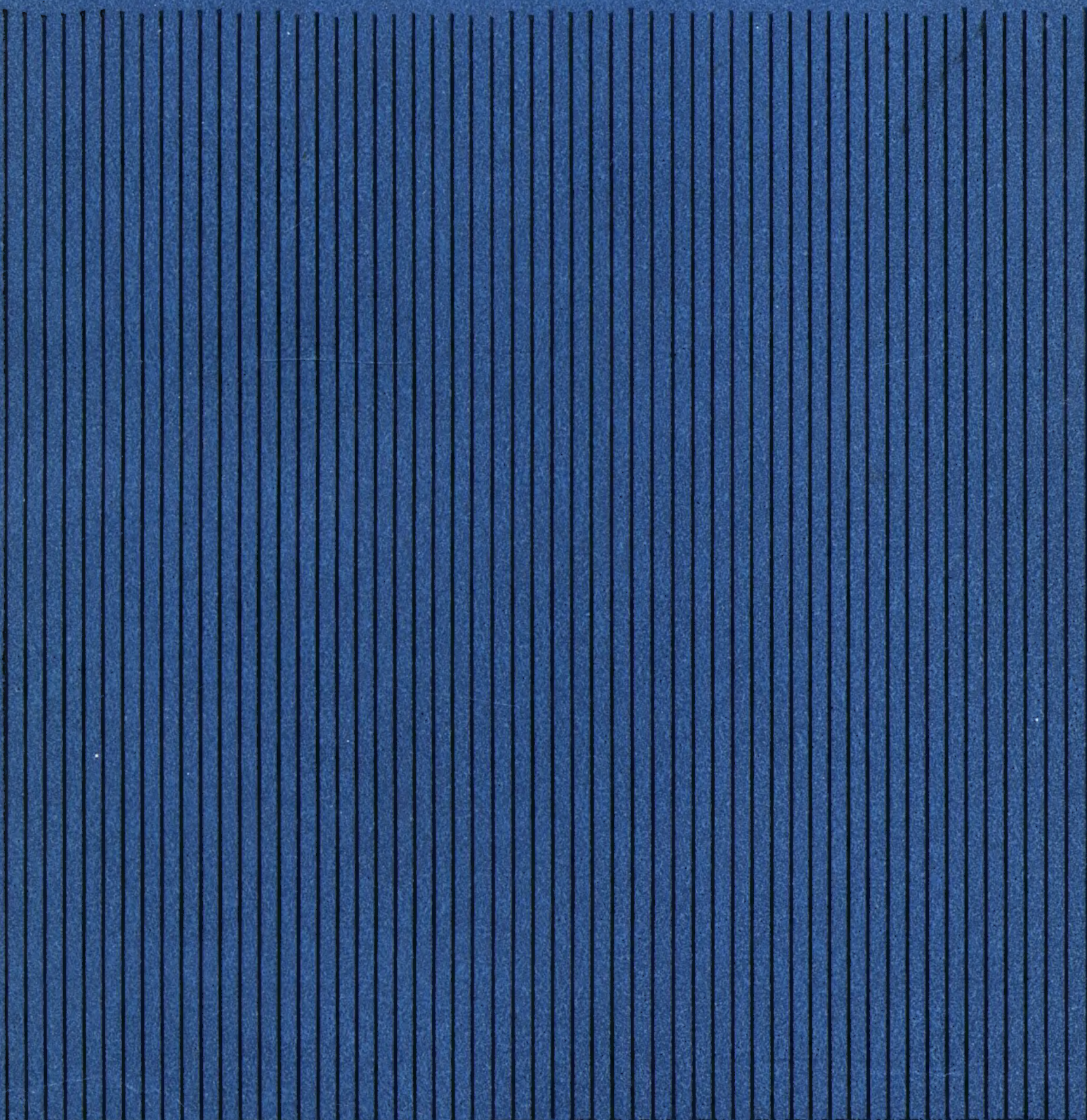


Ж. ДЬЁДОННЕ
ДЖ. КЕРРОЛ

Д. МАМФОРД

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВARIANTОВ





INVARIANT THEORY, Old and New

JEAN A. DIEUDONNÉ

Faculty of Science, Mathematics
University of Nice
Parc Valrose
Nice, France

JAMES B. CARRELL

Division of Mathematical Sciences
Purdue University
Lafayette, Indiana

ACADEMIC PRESS
NEW YORK • LONDON

1971

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE

GEOMETRIC INVARIANT THEORY

DAVID MUMFORD

Associate Professor of Mathematics
Harvard University

SPRINGER VERLAG
BERLIN • HEIDELBERG • NEW YORK

1965

Ж. ДЬЁДОННЕ
ДЖ. КЕРРОЛ
Д. МАМФОРД

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Перевод с английского

А. Н. ПАРШИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1974

Геометрическая теория инвариантов — одна из наиболее популярных и интенсивно развивавшихся областей математики XIX в. Ее достижения связаны с именами таких математиков, как Якоби, Клебш, Кэли, Гильберт. Забытая надолго, эта теория возродилась в наше время на новом уровне в связи с бурным развитием алгебраической геометрии. Ведущая роль здесь принадлежит известному американскому математику Д. Мамфорду.

Предлагаемая вниманию читателей книга состоит из перевода лекций одного из крупнейших французских математиков Ж. Дьёдонне (оформленных в книгу в сотрудничестве с Дж. Керролом), содержащих обзор классической теории инвариантов и элементарное введение в теорию Д. Мамфорда, и перевода части книги Д. Мамфорда „Геометрическая теория инвариантов“, излагающей с полными доказательствами его результаты.

Книга представляет несомненный интерес для специалистов по алгебраической геометрии, функциональному анализу и теории групп Ли, а ее первая часть доступна и полезна студентам-математикам и физикам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

Ж. Дьёдонне, Дж. Керрол,
Д. Мамфорд

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ИНВАРИАНТОВ

Редактор Г. М. Цукерман

Художник Н. Я. Вовк

Художественный редактор В. И. Шаповалов

Технический редактор А. Г. Резоухова

Корректор С. М. Лебедева

Сдано в набор 28/I 1974 г.

Подписано к печати 26/VI 1974 г.

Бумага тип. № 3 $84 \times 108 \frac{1}{32} = 4,38$ бум. л. 14,70 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 11,89

Изд. № 1/7432 Цена 82 коп. Зак. 59.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

Д $\frac{20203-006}{041(01)-74}$ 6—74 © Перевод на русский язык, «Мир», 1974

Об упадке теории инвариантов в XX веке, последовавшем вслед за блестящими достижениями Гильберта в этой области, хорошо известно. Этому предшествовал полувековой период развития, приведший теорию инвариантов на одно из значительных мест в математике XIX века. Почти все математические науки того времени внесли свою лепту в ее возникновение. Сюда относятся и теория чисел (исследования Гаусса и Эрмита о квадратичных формах), и геометрия (задачи метрической и особенно проективной классификации алгебраических кривых (Кели, Сальмон)), и алгебра (теория определителей, этих первых инвариантов (Якоби, Гессе)).

Фундаментальные работы Гильберта, появившиеся в 1890 и 1893 гг. (см. [8] и [9]), содержали решение задачи, над которой долгое время бились специалисты по теории инвариантов. Речь идет о конечности числа образующих кольца целых инвариантов. Доказательство, предложенное Гильбертом в первой работе, было основано на придуманной им для этой цели теореме о базисе. Очень простое и короткое, оно обладало с точки зрения распространенных тогда взглядов одним принципиальным недостатком — было неэффективным. Вторая работа Гильберта завершает его исследования по теории инвариантов. В ней он полностью пересматривает всю задачу и предлагает явный и конструктивный способ ее решения, основанный

на введенном им понятии нуль-формы. Поразителен контраст между судьбами этих двух работ Гильберта. Если первая стимулировала развитие целого ряда разделов математики XX века (коммутативная алгебра, алгебраическая геометрия, теория представлений, гомологическая алгебра), то вторая вскоре после ее публикации оказалась забытой и почти семьдесят лет не оказывала никакого влияния на развитие математики.

Положение резко изменилось с появлением в начале шестидесятых годов нашего века работ американского математика Д. Мамфорда. Ему удалось переосмыслить результаты и конструкции второй работы Гильберта и вообще задачи теории инвариантов, используя точку зрения созданной к этому времени Гротендиком теории схем. Следствием этого было данное Мамфордом решение старой, восходящей еще к Риману, проблемы алгебраической геометрии — построение многообразия модулей алгебраических кривых. Аналогичные задачи были решены Мамфордом и для других геометрических объектов, таких, как абелевы многообразия, векторные расслоения на кривых, схемы Пикара.

Предлагаемая вниманию читателя книга состоит из двух разделов: книги Ж. Дьёдонне и Дж. Керрола «Теория инвариантов. Старое и новое» и части книги Д. Мамфорда «Геометрическая теория инвариантов» — и дополнена двумя докладами (Мамфорда и Шешадри) на Международных математических конгрессах.

Книга Дьёдонне и Керрола содержит вполне элементарное и вместе с тем достаточно современное изложение как классической теории инвариантов (символический метод Клебша — Аронгольда — Гордана

и связи с теорией представлений), так и новых достижений теории, связанных с именами Нагаты и Мамфорда (контрпример к 14-й проблеме Гильберта, современные доказательства теоремы конечности, теория Мамфорда и ее связь с идеями Гильберта). Особенно ценным представляется переизложение на современном языке эффективных конструкций второй работы Гильберта (впервые после ее выхода). Для чтения этой части книги достаточно лишь самых общих познаний из курса современной алгебры (все необходимое без труда находится в «Алгебре» Ленга или «Современной алгебре» Ван-дер-Вардена). Более глубокие результаты, относящиеся к полупростым алгебрам, изложены с полными доказательствами в приложении.

Что касается книги Мамфорда, то в настоящее издание включен перевод той ее части, которая цельным и законченным образом излагает исследования автора именно по теории инвариантов. Требования к читателю здесь гораздо выше (предполагается хорошее знание алгебраической геометрии и, в частности, теории схем). Таким образом, широкие круги математиков могут ознакомиться с новыми идеями в теории инвариантов (по изложению Дьёдонне и Керрола), а специалисты овладеть подробными и технически современными доказательствами основных теорем новой теории.

Не вошедшая в наше издание часть книги Мамфорда посвящена приложениям теории инвариантов к построению многообразия модулей алгебраических кривых и абелевых многообразий, связям с алгебраическими группами и т. п. — вопросам, в которых исследования последних лет произвели большие

изменения ¹⁾). Некоторое представление о применениях теории Мамфорда и о ее новейших результатах читатель может получить из помещенных в конце книги переводов докладов Мамфорда и Шешадри на Международных математических конгрессах 1962 и 1970 гг. Доклад Мамфорда содержит, помимо прочего, набросок очень важной для алгебраической геометрии конструкции схемы Пикара. Подробное изложение этого круга вопросов для случая алгебраических поверхностей можно найти в книге [24].

При переводе был сделан ряд сокращений и изменений, которые, за исключением исправленных опечаток и неточностей, указаны в примечаниях переводчика. В конце книги приведен общий список цитированной литературы, в который были включены по возможности все важнейшие работы по теории инвариантов последнего времени.

А. Н. Паршин

¹⁾ См., в частности, доклад Мамфорда на конгрессе в Ницце (Mumford D., The structure of the moduli spaces of curves and Abelian varieties, Actes du Congrès Intern. Mathem. 1970 (Nice), Paris, 1971, 457—466).

Ж. ДЬЁДОННЕ, ДЖ. КЕРРОЛ

ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Старое и новое

ВВЕДЕНИЕ

Уже несколько раз торжественно провозглашалось, что теория инвариантов умерла, но она каждый раз снова возрождалась как феникс из пепла. Главным достижением первого периода развития теории инвариантов было открытие так называемого символического метода, позволяющего в принципе вычислять все инварианты почти механическим образом. Вскоре было, однако, обнаружено, что, за исключением нескольких простых случаев, действительное проведение вычислений приводит к огромной работе, несоизмеримой с получаемым результатом. Особенно это сказывалось в то время, когда все вычисления делались вручную; пожалуй, сейчас стоило бы с помощью компьютеров продолжить вычисления инвариантов, проведенные в XIX веке.

Частично по указанной причине следующей задачей теории было нахождение фундаментальной системы инвариантов, т. е. такого конечного множества инвариантов, что каждый инвариант является полиномом от элементов этого множества. Хорошо известно, что существование таких систем было доказано Гильбертом в 1890 г. в блестящей работе, которая сделала его в одну ночь знаменитым и которая по концепциям и методам может рассматриваться как первая работа по современной алгебре. Но успех Гильберта в то же время возвестил гибель теории инвариантов XIX века, оставшейся без больших проблем и пришедшей вскоре в полный упадок.

Первое ее возрождение было стимулировано развитием глобальной теории полупростых групп и их представлений (И. Шур, Г. Вейль, Э. Картан) примерно в 1935 г., когда было осознано, что классическая теория инвариантов является в действительности частным случаем развитой новой теории. Это со всей

ясностью показано в знаменитой книге Г. Вейля «Классические группы», но, по-видимому, снова отсутствие глубоких проблем было причиной, по которой после появления этой книги не осуществилась реализация указанных новых важных идей.

Лишь совсем недавно произошло еще одно оживление теории, обязанное, главным образом, деятельности Д. Мамфорда, понявшего, что он может почерпнуть из теории инвариантов некоторые средства для решения проблемы модулей алгебраических кривых. Его новый подход к теории привел к появлению в ней весьма общей задачи построения «пространств орбит» (с подходящими структурами) алгебраических групп, действующих на алгебраических многообразиях. Занимаясь этим, он обнаружил, что некоторая существенная техника и идеи, имеющие отношение к интересующей его задаче, долгое время были похоронены на страницах прекрасной, но забытой работы, которую Гильберт опубликовал в 1893 г. В своей книге «Геометрическая теория инвариантов»¹⁾ Мамфорд модернизировал и сильно обобщил эти идеи, используя при этом язык теории схем наряду с важными соображениями, принадлежащими Шевалле, Нагате, Ивахори, Тейту, Титсу и ему самому. Представляется весьма правдоподобным, что эта книга будет еще в течение многих лет оказывать глубокое влияние, а ее методы окажутся могущественными и для многих других проблем.

В этих лекциях (читанных в Вашингтонском университете в 1967 г.) я пытался дать элементарное введение в теорию инвариантов, стараясь описать ее более систематически, чем в книге Вейля, как часть теории линейных представлений групп и не пренебрегая при этом ее геометрическим происхождением. Первые две главы состоят по существу из описания символического метода, рассматриваемого с этой точки зрения. Теорема конечности и контрпример Нагаты к возможности ее распространения на

¹⁾ Ее русский перевод (с сокращением) и составляет вторую часть настоящей книги. — *Прим. перев.*

произвольные алгебраические группы составляют предмет третьей главы, а глава 4 посвящена введению в теорию Мамфорда.

Я старался сделать всю книгу доступной читателям, имеющим лишь минимальные познания в алгебре (на уровне младших курсов). Необходимые сведения из некоммутативной алгебры изложены в приложении. Лишь в главах 3 и 4 мне нужны некоторые менее элементарные результаты из коммутативной алгебры; их можно найти в трактате Зарисского и Самюэля¹⁾.

Эта книга не приняла бы своей настоящей формы без активного участия профессора Дж. Керрола, который приложил большие усилия, чтобы привести в пригодный для чтения вид многие рассуждения, которые были лишь вкратце намечены в устных лекциях. Я рад выразить ему сердечную благодарность за его неоценимую помощь.

Ж. Дьёдонне

¹⁾ Для упомянутой категории читателей, вероятно, проще обратиться к книжке М. Атьи и И. Макдональда [22], содержащей в себе все необходимое. — *Прим. перев.*

§ 1. Понятие инварианта

Пусть Γ — группа, действующая на множестве E . Это означает, что задано отображение $(\sigma, x) \rightarrow \sigma \cdot x: \Gamma \times E \rightarrow E$ со свойствами

- (1) $(\sigma \cdot \tau) \cdot x = \sigma \cdot (\tau \cdot x)$ для всех $x \in E, \sigma, \tau \in \Gamma$;
- (2) $\varepsilon \cdot x = x$ для всех $x \in E$, где ε — единичный элемент группы Γ .

Отображение $\mu_\sigma: E \rightarrow E$, определенное формулой $x \rightarrow \sigma \cdot x$, будет тогда биекцией¹⁾ множества E , поскольку из свойств (1) и (2) следует, что $\mu_\sigma^{-1}\mu_\sigma = \mu_\sigma\mu_\sigma^{-1}$ — тождественное отображение этого множества. В силу (1) отображение $\sigma \rightarrow \mu_\sigma: \Gamma \rightarrow \mathcal{G}_E$ группы Γ в группу биекций множества E является гомоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $x \in E$ называется Γ -инвариантом или просто инвариантом, если $\mu_\sigma(x) = x$ для всех $\sigma \in \Gamma$. Подмножество F множества E называется Γ -инвариантным или просто инвариантным, если $\mu_\sigma(F) \subset F$ для всех $\sigma \in \Gamma$.

Ассоциированные действия группы Γ

- (1) Если $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств, на которых действует группа Γ , то правило $\sigma \cdot (x_\alpha) = (\sigma \cdot x_\alpha)$, $\sigma \in \Gamma$, определяет ее действие на $\mathcal{E} = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$.

- (2) Γ действует на множестве $\mathcal{P}(E)$ всех подмножеств множества E , если положить $\sigma \cdot F = \sigma(F)$. Подмножество в E , которое инвариантно относительно этого действия, будет инвариантным относительно действия группы Γ на E , но не наоборот.

¹⁾ То есть взаимно однозначным отображением множества на себя. — Прим. перев.

(3) Предположим, что Γ действует на множествах E и F . Пусть $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ — множество всех отображений $E \rightarrow F$. Тогда Γ действует естественным образом на $\mathcal{F}(E, F)$. В самом деле, если вложить $\mathcal{F}(E, F)$ в $\mathcal{P}(E \times F)$, отождествляя отображение с его графиком, и использовать действия, определенные в п. (1) и (2), то легко видеть, что таким естественным действием является $\sigma \cdot u: \sigma \cdot x \rightarrow \sigma \cdot u(x)$, $u \in \mathcal{F}(E, F)$. Это действие можно также определить, положив $\sigma \cdot u \in \mathcal{F}(E, F)$ равным $(\sigma \cdot u)x = \sigma \cdot u(\sigma^{-1} \cdot x)$ для всех $u \in \mathcal{F}(E, F)$ и $\sigma \in \Gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $u \in \mathcal{F}(E, F)$ называется *конкомитантом* группы Γ , если u инвариантно относительно действия Γ на $\mathcal{F}(E, F)$. Иными словами, u — конкомитант, если для всех $x \in E$ и $\sigma \in \Gamma$ имеет место равенство $\sigma \cdot (u(x)) = u(\sigma \cdot x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что Γ действует на каждом множестве семейства $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ и на множестве F . Будем говорить, что $u \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, F)$ — *одновременный конкомитант* группы Γ , если $\sigma \cdot (u(x_\alpha)) = u((\sigma \cdot x_\alpha))$ для всех $\sigma \in \Gamma$.

З а м е ч а н и е. В литературе вместо слова «конкомитант» иногда используются термины «ковариант» и «эквивариант». Поскольку эти термины часто употребляются в многих других смыслах, мы будем в течение некоторого времени пользоваться исключительно словом «конкомитант».

Пусть теперь E — векторное пространство над полем K , и предположим, что группа Γ действует на E *линейно*. Это означает, что для каждого $\sigma \in \Gamma$ линейно отображение $\mu_\sigma: E \rightarrow E$. Таким образом, μ_σ — элемент общей линейной группы $\mathbf{GL}(E)$, а соответствие $\sigma \rightarrow \mu_\sigma: \Gamma \rightarrow \mathbf{GL}(E)$ является *линейным представлением* группы Γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гомоморфизм $\chi: \Gamma \rightarrow K^* = K \setminus \{0\}$ называется *характером* или *абелевым характером* группы Γ в поле K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Относительным инвариантом веса χ группы Γ называется такое отображение $u: E \rightarrow K$, что $u(\sigma \cdot x) = \chi(\sigma) \cdot u(x)$ для всех $\sigma \in \Gamma$ и $x \in E$. Относительный инвариант веса $\chi = 1$ называется абсолютным инвариантом группы Γ .*

Иначе говоря, относительный инвариант веса χ группы Γ на E является конкомитантом $u \in \mathcal{F}(E, K)$ по отношению к действию группы Γ на K , задаваемому характером χ .

ПРИМЕРЫ. (1) Пусть Γ — группа изометрий плоскости $\mathbf{R}^2$. Она изоморфна линейной группе преобразований пространства $\mathbf{R}^3$, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ U & & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix},$$

где U принадлежит ортогональной группе $\mathbf{O}(2)$, а a и b — вещественные числа. Рассмотрим $\mathbf{R}^2$ как плоскость в $\mathbf{R}^3$, определяемую уравнением $\xi_3 = 1$. Если $p, q, r \in \mathbf{R}^2$, то $(x - p | q - r) \xrightarrow{=} 0$ является уравнением перпендикуляра к отрезку qr , проходящего через p . Линейная форма $(x - p | q - r)$ есть конкомитант группы Γ в пространстве, двойственном к $\mathbf{R}^3$. Позднее мы вернемся к этому примеру.

(2) Пусть $E = \mathbf{R}^2$ и $\Gamma = \mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$. Для $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$ положим $[x, y] = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$. Простое вычисление показывает, что $[\sigma x, \sigma y] = \det(\sigma)[x, y]$, так что $[\ , \]$ — относительный (одновременный) инвариант веса $\chi(\sigma) = \det(\sigma)$.

(3) Пусть E — пространство билинейных форм на $\mathbf{R}^n$ и $\Gamma = \mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$. Для $U \in E$ положим $\sigma \cdot U = {}^t \sigma \cdot U \cdot \sigma$. Тогда $\det(\sigma \cdot U) = \det^2(\sigma) \cdot \det(U)$, так что $\det(U)$ — относительный инвариант веса $\det^2(\sigma)$.

§ 2. Рациональные конкомитанты

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что характеристика поля K равна 0. Пространства E и F будут конечномерными векторными K -пространствами, а Γ — группой, линейно действующей на E и F . Пусть $e_1, \dots, e_m$ — базис в E и $f_1, \dots, f_n$ — базис в F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конкомитант $u: E \rightarrow F$ называется рациональным, если $u\left(\sum_j \xi_j e_j\right) = \sum_k u_k(\xi_1, \dots, \xi_m) f_k$, где все u_k — рациональные функции от $\xi_1, \dots, \xi_m$. Если все u_k — полиномы, то u называется полиномиальным конкомитантом.

Заметим, что понятие рациональности (соответственно полиномиальности) конкомитанта не зависит от выбора базисов $e_1, \dots, e_m$ в E и $f_1, \dots, f_n$ в F .

Мы определим для некоторых типов групп Γ полностью все рациональные конкомитанты на конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0. Класс рациональных конкомитантов на конечномерном векторном пространстве над полем характеристики 0 особенно замечателен тем обстоятельством, что, как мы увидим в следующих четырех предложениях, он полностью определяется линейными конкомитантами на тензорных степенях этого пространства.

Напомним сначала некоторые факты из алгебры. За более детальным рассмотрением отсылаем читателя к «Современной алгебре» Ван-дер-Вардена или к любому другому элементарному учебнику алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (Принцип Вейля устранимости алгебраических неравенств.) Пусть I — бесконечная область целостности с единицей и $x_1, \dots, x_n$ — переменные над I . Предположим, что $f, g_1, \dots, g_r \in I[x_1, \dots, x_n]$ и что для каждого набора значений $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$ переменных x_i в кольце I , таких, что $g_i(s_1, \dots, s_n) \neq 0$, имеем $f(s_1, \dots, s_n) = 0$. Тогда $f = 0 \in I[x_1, \dots, x_n]$.

Доказательство в случае одной переменной следует из результатов § 21 «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена. Общий случай получается затем индукцией по n .

Предположим теперь, что $x_1, \dots, x_m$ — переменные над полем K . В кольце $K[x_1, \dots, x_m]$ имеет место единственность разложения на множители, и, следовательно, любые два полинома $p_1, p_2 \in K[x_1, \dots, x_m]$ обладают наибольшим общим делителем. Любые два наибольших общих делителя отличаются на обратимый элемент в поле K . Более того, если p_1 и p_2 — взаимно простые элементы (н. о. д. p_1 и p_2 равен 1) кольца с однозначным разложением на множители и p_1 делит qp_2 , то p_1 делит q .

Выбор базиса $e_1, \dots, e_m$ пространства E определяет координатные функции $\xi_1, \dots, \xi_m: E \rightarrow K$, задаваемые для каждого $i = 1, \dots, m$ равенствами $\xi_i(\sum \lambda_j e_j) = \lambda_i$. Кольцом полиномиальных функций на E называется по определению подкольцо $S(E)$ кольца $\mathcal{F}(E, K)$, порожденное координатными функциями $\xi_1, \dots, \xi_m$. В силу принципа устранимости кольцо $S(E)$ изоморфно $K[x_1, \dots, x_m]$. Этот сохраняющий степени изоморфизм переводит ξ_i в x_i , $i = 1, \dots, m$, а постоянный полином λ в $\lambda \in K \subset K[x_1, \dots, x_m]$. Следовательно, кольцо полиномиальных функций на E является кольцом с однозначным разложением на множители.

ЛЕММА. Если $p_1(y), \dots, p_r(y)$ — полиномиальные функции на E с н. о. д., равным 1, то для всех $\sigma \in \Gamma$ н. о. д. полиномиальных функций $p_1(\sigma \cdot y), \dots, p_r(\sigma \cdot y)$ также равен 1.

Доказательство. Отображение $y \rightarrow \sigma \cdot y$, будучи линейным автоморфизмом пространства E , определяет по правилу $p(y) \rightarrow p(\sigma \cdot y)$ сохраняющий степень автоморфизм кольца полиномиальных функций на E . Поэтому, если $q(y)$ — делитель функций $p_1(\sigma \cdot y), \dots, p_r(\sigma \cdot y)$, не являющийся постоянным полиномом,

то $q(\sigma^{-1} \cdot y)$ — непостоянный делитель функций $p_1(y), \dots, p_r(y)$.

Этим завершается наше алгебраическое отступление.

Предложение 1. *Каждый ненулевой рациональный конкомитант $u: E \rightarrow F$ можно представить в виде $u = (p/q)v$, где $v: E \rightarrow F$ — полиномиальный конкомитант, а p и q — относительные полиномиальные инварианты.*

Доказательство. Представим u в виде $u(x) = \sum_k u_k(x) f_k$, где u_k — рациональные функции на E .

Сделанные выше замечания показывают, что каждую функцию u_k можно записать как $(p/q)v_k$, где p и q — взаимно простые полиномы, а v_k — полиномы с н. о. д., равным 1. Пусть $(a_{ij}(\sigma))$ — матрица морфизма $\mu_\sigma: F \rightarrow F$ в базисе $f_1, \dots, f_n$. Тогда из конкомитантности u следует, что для всех $\sigma \in \Gamma$ и $x \in E$, таких, что $q(x) \neq 0$ и $q(\sigma \cdot x) \neq 0$, выполняется равенство

$$p(x) q(\sigma \cdot x) \sum_j a_{ij}(\sigma) v_j(x) = p(\sigma \cdot x) q(x) v_i(\sigma \cdot x), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, n$. Так как поле K бесконечно, принцип устранимости (переформулированный подходящим образом для кольца полиномов на E) утверждает, что равенство (1) выполняется при всех $x \in E$.

Поскольку при всех i полином p делит левую часть равенства, а $v_i(\sigma \cdot x)$ не имеют общего множителя, $p(x)$ делит $p(\sigma \cdot x)$, а так как степени полиномов $p(x)$ и $p(\sigma \cdot x)$ одинаковы, то $p(\sigma \cdot x) = d(\sigma) p(x)$, где $d: \Gamma \rightarrow K^*$ — характер. Аналогичным образом, $q(\sigma \cdot x)$ делит $q(x)$ и, следовательно, $q(\sigma \cdot x) = d'(\sigma) q(x)$, где $d': \Gamma \rightarrow K^*$ — другой характер. Окончательно получаем $v_i(\sigma \cdot x) = \chi(\sigma) \sum_j a_{ij}(\sigma) v_j(x)$, где $\chi(\sigma) = d'(\sigma)/d(\sigma)$. Это представление выражает в точности тот факт, что $v = \sum v_i f_i$ является полиномиаль-

ным конкомитантом по отношению к линейному действию $(\sigma, y) \rightarrow \chi(\sigma)\sigma \cdot y$ группы Γ на F .

Мы свели, таким образом, нахождение рациональных конкомитантов к нахождению *полиномиальных*. Далее имеет место.

Предложение 2. *Запишем полиномиальный конкомитант $u: E \rightarrow F$ в виде $u = u_0 + u_1 + \dots + u_k$, где каждый полином u_j — однородный полином степени j . Тогда каждый u_j будет конкомитантом.*

Доказательство. Так как для всех $x \in E$ имеет место равенство $u(\sigma \cdot x) = \sigma \cdot (u(x))$, то для всех $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} u_0 + \lambda u_1(\sigma \cdot x) + \dots + \lambda^k u_k(\sigma \cdot x) &= \\ &= \sigma \cdot u_0 + \lambda \sigma \cdot (u_1(x)) + \dots + \lambda^k \sigma \cdot (u_k(x)). \end{aligned}$$

А поскольку поле K бесконечно, это возможно, только если $\sigma \cdot (u_i(x)) = u_i(\sigma \cdot x)$ для всех i и всех $x \in E$.

Поляризация

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — переменные над полем K .

Определение. Однородный полином полной степени r из кольца $K[\xi_1, \dots, \xi_n]$ называется *n -арной формой порядка r* .

Пусть f есть n -арная форма порядка r , $f(x) = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Возьмем $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in K^n$. По формуле Тейлора

$$f(x + \lambda z) = f(x) + \lambda D_{zx}f(x) + \dots,$$

где

$$D_{zx}f(x) = \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x) + \dots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial \xi_n}(x).$$

Так как f — однородный полином степени r , из теоремы Эйлера вытекает, что

$$D_{xx}f(x) = r \cdot f(x)$$

и, следовательно, $f(x)$ можно восстановить, зная $D_{zx}f(x)$; $D_{zx}f(x)$ называется *первой частичной*

поляризацией полинома $f(x)$. Поскольку f — полином степени r , функция

$$Pf(z^{(1)}, \dots, z^{(r)}) = D_{z^{(r)}x} D_{z^{(r-1)}x} \dots D_{z^{(1)}x} f(x)$$

является функцией только $z^{(1)}, \dots, z^{(r)}$ и в действительности полилинейна и симметрична по этим переменным. Ясно, как определить Pf для векторнозначного полинома f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть f — векторнозначная n -арная форма порядка r . Тогда Pf называется *полной поляризацией* формы f .

Восстановление (restitution)

Последовательно применяя теорему Эйлера, находим, что $Pf(x, \dots, x) = r! f(x)$. И так как K — поле характеристики 0, $f(x)$ можно восстановить по $Pf(x, \dots, x)$. Именно, $f(x) = (r!)^{-1} Pf(x, \dots, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $u: E \rightarrow F$ — однородный полиномиальный конкомитант степени r . Тогда, если $(x_1, \dots, x_r) \rightarrow v(x_1, \dots, x_r): E^r \rightarrow F$ — его поляризация, то v является полилинейным одновременным конкомитантом от $x_1, \dots, x_r$.

Доказательство. Используя стандартное обозначение мульти-индексов, имеем для всех $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ представление

$$u(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r) = \sum_{\substack{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ |\alpha| = r}} c_\alpha \lambda^\alpha u_\alpha(x_1, \dots, x_r).$$

Применяя $\sigma \in \Gamma$ и пользуясь конкомитантностью u , $u(\lambda_1 \sigma \cdot x_1 + \dots + \lambda_r \sigma \cdot x_r) = \sigma \cdot (u(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r))$, получаем, что

$$\sum_{\alpha} c_\alpha \lambda^\alpha u_\alpha(\sigma \cdot x_1, \dots, \sigma \cdot x_r) = \sum_{\alpha} c_\alpha \lambda^\alpha \sigma \cdot (u_\alpha(x_1, \dots, x_r)).$$

Поскольку поле K бесконечно, для всех α имеем $\sigma \cdot (u_\alpha(x_1, \dots, x_r)) = u_\alpha(\sigma \cdot x_1, \dots, \sigma \cdot x_r)$, так что u_α — одновременный конкомитант. А так как v является

одним из u_α , именно $v = u_{(1, \dots, 1)}$, то v — полилинейный одновременный конкомитант.

Окончательная редукция задачи на пути от полилинейной конкомитантности к линейной конкомитантности проводится с помощью полилинейной алгебры тем же способом, что и построение линейного отображения по полилинейному.

Пусть $E_1, \dots, E_s, F$ — конечномерные векторные K -пространства, и обозначим через $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_s; F)$ пространство всех полилинейных отображений

$$u: E_1 \times \dots \times E_s \rightarrow F.$$

Если каждое E_i есть E , то обозначим это пространство через $\mathcal{L}_s(E; F)$. Пусть $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$ — тензорное произведение (над K) пространств $E_1, \dots, E_s$. Если каждое E_i совпадает с E , оно превращается, в наших обозначениях, в $E^{\otimes s}$, s -ю тензорную степень пространства E . Естественное отображение $\varphi: E_1 \times \dots \times E_s \rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_s$ индуцирует изоморфизм

$\text{Hom}(E_1 \otimes \dots \otimes E_s, F) \rightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_s; F)$, где $\omega \rightarrow \omega\varphi$ ($\text{Hom}(E, F)$ обозначает пространство всех K -линейных отображений из E в F).

Предположим теперь, что на пространствах E_i действует группа Γ . Тогда Γ действует и на $E_1 \otimes \dots \otimes E_s$, если положить $\sigma \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_s) = \sigma \cdot x_1 \otimes \dots \otimes \sigma \cdot x_s$ на образующих $x_1 \otimes \dots \otimes x_s$ и потребовать, чтобы действие было линейным. Свойство универсальности тензорного произведения показывает, что это действие корректно определено, поскольку отображение $(x_1, \dots, x_s) \rightarrow \sigma \cdot x_1 \otimes \dots \otimes \sigma \cdot x_s$ полилинейно. Соответствующее представление называется *тензорным представлением* группы Γ .

Предложение 4. Если $v \in \mathcal{L}_r(E; F)$ — одновременный полилинейный конкомитант и $v = \omega\varphi$ с $\omega \in \text{Hom}(E^{\otimes r}, F)$, то ω — линейный конкомитант, и обратно.

Доказательство немедленно следует из определений.

§ 1. Представления линейных групп

Пусть группа Γ линейно действует на конечномерном векторном K -пространстве E , или, что эквивалентно, задано ее линейное представление в группе $\mathbf{GL}(E)$. Тогда E называется Γ -модулем. Если E' — другой конечномерный Γ -модуль, то линейный конкомитант $\mu: E \rightarrow E'$ группы Γ является по определению гомоморфизмом Γ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Конечномерный Γ -модуль E называется *простым*, а соответствующее представление *неприводимым*, если в E нет нетривиальных собственных Γ -инвариантных подпространств. Представление группы Γ в $\mathbf{GL}(E)$ *вполне приводимо*, если модуль E является прямой суммой простых Γ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если E — простой Γ -модуль, то каждый конкомитант μ группы Γ , определенный на E , называется *неприводимым конкомитантом*.

Предположим теперь, что Γ — подгруппа группы $\mathbf{GL}(n, K)$ невырожденных матриц порядка $n \times n$ над полем K . Мы будем постоянно предполагать, что всякий раз, когда Γ действует на конечномерном векторном K -пространстве E , ее действие рационально. Иначе говоря, представление $F: \Gamma \rightarrow \mathbf{GL}(E)$ таково, что, если записать элементы группы $\mathbf{GL}(E)$ в виде матриц (в некотором базисе пространства E), то элементы матрицы $F(X)$ будут рациональными функциями элементов x_{ij} матрицы X . Такое представление будем называть *рациональным линейным представлением* группы Γ . Группа Γ будет называться *редуктивной* в том и только том случае, когда каждое

ее конечномерное рациональное линейное представление вполне приводимо.

Обозначение. Через $M_n(K)$ будет обозначаться алгебра матриц порядка $n \times n$ над полем K . Сами матрицы будем обозначать заглавными буквами $X, Y, \dots$.

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда $\Gamma = \mathbf{GL}(n, \Omega)$, где Ω — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Предположим, что $X \rightarrow F(X)$ — рациональное линейное представление группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ в $\mathbf{GL}(m, \Omega)$. Тогда для всех $X, Y \in M_n(\Omega)$, таких, что $\det(X) \neq 0$ и $\det(Y) \neq 0$, выполняется соотношение $F(XY) = F(X)F(Y)$. Поскольку F рационально, его можно представить в виде $F(X) = (p(X)/q(X))G(X)$, где p и q — взаимно простые полиномы, а G — матрица с полиномиальными элементами, н.о.д. которых равен 1. Из уравнения $F(XY) = F(X)F(Y)$ в предположении, что ни $\det(X)$, ни $\det(Y)$ не равны нулю, следует равенство

$$q(XY)p(X)p(Y)G(X)G(Y) = q(X)q(Y)p(XY)G(XY). \quad (1)$$

Таким образом, (1) справедливо, если предположить, что выполняется конечное число полиномиальных неравенств. В силу принципа устранимости алгебраических неравенств соотношение (1) должно иметь место для всех матриц X, Y из $M_n(\Omega)$.

Предложение 1. Пусть $X \rightarrow F(X)$ — рациональное линейное представление группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$. Тогда $F = (p/q)G$, где p и q — полиномиальные характеры, а G — полиномиальное ¹⁾ линейное представление группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$.

Доказательство. Как и выше, представим F в виде $(p/q)G$, где p и q нормализованны так, чтобы

¹⁾ Полиномиальные представления определяются аналогично рациональным с заменой рациональных функций на полиномы. — Прим. перев.

$p(I_n) = 1$ и $q(I_n) = 1$. Тогда для $X, Y \in M_n(\Omega)$

$$p(XY)q(X)q(Y)G(XY) = p(X)p(Y)q(XY)G(X)G(Y). \quad (1)$$

Обычными рассуждениями убеждаемся, что (1) все еще справедливо, если в качестве X и Y подставить матрицы от n^2 переменных¹⁾. Расширим поле Ω до поля рациональных функций $\Omega(Y)$. Так как $G(I_n) = I_m$ и $\det(G(Y)) \neq 0$, обе части формулы (1) можно умножить на $G(Y)^{-1}$ и получить

$$\begin{aligned} p(XY)q(X)q(Y)G(XY)G(Y)^{-1} = \\ = p(X)p(Y)q(XY)G(X). \end{aligned} \quad (2)$$

Сразу видно, что в кольце $\Omega(Y)[X]$ полином $q(X)$ делит $q(XY)$ и, следовательно, по лемме Гаусса (см. «Современную алгебру» Ван-дер-Вардена) полином $q(X)$ делит $q(XY)$ в кольце $\Omega[Y][X] = \Omega[X, Y]$. Аналогично, $q(Y)$ делит $q(XY)$. Поскольку полиномы $q(X)$ и $q(Y)$ взаимно просты, для некоторого $f(X, Y) \in \Omega[X, Y]$ имеем $q(XY) = f(X, Y)q(X)q(Y)$.

На самом деле f — полином степени нуль. Действительно, если предположить, что его полная степень равна d , то полная степень полинома $q(X)q(Y)$ окажется равной $2d$. Но XY — семейство n^2 полиномов степени 2, откуда следует, что $q(XY)$ должен иметь полную степень $\leq 2d$. А так как это возможно, только если степень f равна 0, то наше утверждение доказано. Поскольку $q(I_n) = 1$, то $q(XY) = q(X)q(Y)$.

Рассмотрев (контраградиентное) представление $X \rightarrow {}^tF^{-1}(X)$ (которое меняет ролями p и q), убеждаемся в том, что $p(XY) = p(X)p(Y)$. Отсюда следует, что $G(XY) = G(X)G(Y)$, так что p , q и G удовлетворяют требованиям предложения 1.

Мы показали, что каждое рациональное линейное представление группы $GL(n, \Omega)$ является с точностью до рационального характера полиномиальным представлением. Теперь мы покажем, что любое поли-

¹⁾ Это означает, что элементы матриц рассматриваются как независимые переменные. — Прим. перев.

номиальное представление этой группы в $\mathbf{GL}(E)$ будет после композиции с некоторым внутренним автоморфизмом группы $\mathbf{GL}(E)$ прямой суммой *однородных* полиномиальных представлений. Чтобы показать это, обратимся к жордановой нормальной форме матрицы. Для этого нужно, конечно, предполагать, что поле Ω алгебраически замкнуто.

Если U — произвольная матрица порядка $n \times n$ над алгебраически замкнутым полем Ω , то над Ω существует такая невырожденная матрица S , что SUS^{-1} является прямой суммой матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \alpha & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

с α на диагонали, 1 непосредственно над диагональю и 0 на остальных местах. Каждое α , появляющееся на диагонали матрицы SUS^{-1} , будет корнем минимального полинома матрицы U . Про матрицу такого вида говорят, что она находится в *канонической жордановой форме*.

Пусть теперь $F: \mathbf{GL}(n, \Omega) \rightarrow \mathbf{GL}(m, \Omega)$ — полиномиальное представление. Рассмотрим его ограничение на центр группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$, и пусть $G(\lambda) = F(\lambda I_n)$ для каждого $\lambda \in \Omega$. Если μ также принадлежит Ω , то $G(\lambda + \lambda\mu) = G(\lambda)G(1 + \mu)$ и по теореме Тейлора

$$G(\lambda)(I_m + \mu G'(1) + \dots) = G(\lambda) + \lambda\mu G'(\lambda) + \dots$$

Поскольку поле Ω бесконечно, это может случиться, только если $G(\lambda)G'(1) = \lambda G'(\lambda)$.

Положим $G'(1) = P$. Можно предполагать, что P находится в канонической жордановой форме, ибо, если $S \in \mathbf{GL}(m, \Omega)$ такова, что матрица SPS^{-1} находится в жордановой форме, то полиномиальное представление $X \rightarrow SF(X)S^{-1}$ эквивалентно F и для

него $G'(1)$ находится в жордановой форме. Мы утверждаем, что P — диагональная матрица. Если это не так, то после подходящего преобразования подобия P будет обязательно иметь вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ 0 & \alpha & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

Запишем $G(\lambda) = (f_{ij}(\lambda))$. Из равенства $G(\lambda)P = \lambda G'(\lambda)$ получаем тогда, что

$$\lambda f'_{11}(\lambda) = \alpha f_{11}(\lambda), \quad (3)$$

$$f_{11}(\lambda) + \alpha f_{12}(\lambda) = \lambda f'_{12}(\lambda). \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $\alpha = \deg f_{11}$, скажем $\alpha = j$. Из (4) находим, что если f_{12} имеет степень k , то

$$a\lambda^j = -b(j-k)\lambda^k,$$

где $f_{11}(\lambda) = a\lambda^j + \dots$ и $f_{12}(\lambda) = b\lambda^k + \dots$, $ab \neq 0$. Так как Ω — поле характеристики 0, это невозможно, и матрица P должна быть диагональной. Более того, последовательно повторяя это рассуждение, можно получить, что диагональные элементы матрицы P суть положительные целые числа. Можно, следовательно, написать (после еще одного преобразования подобия)

$$P = \begin{pmatrix} m_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_p I_{m_p} \end{pmatrix},$$

где все $m_1 > m_2 > \dots > m_p > 0$ — целые числа. Поскольку $G(\lambda)P = \lambda G'(\lambda)$, отсюда следует, что

$$G(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{m_1} I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^{m_p} I_{m_p} \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что

$$F(X) = \begin{pmatrix} F_{11}(X) & \dots & F_{1m}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{m1}(X) & \dots & F_{mm}(X) \end{pmatrix},$$

где $F_{ij}(X)$ — матрицы порядка $m_i \times m_j$. Так как $F(X)G(\lambda) = G(\lambda)F(X) = F(\lambda X)$, для $i \neq j$ имеем $\lambda^{m_i}F_{ij}(X) = \lambda^{m_j}F_{ij}(X)$, и, раз $m_i \neq m_j$, то $F_{ij}(X) = 0$. Кроме того, $F_{ii}(\lambda X) = \lambda^{m_i}F_{ii}(X)$, так что $F_{ii}(X)$ — однородное полиномиальное представление группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ в $\mathbf{GL}(m_i, \Omega)$. Итак,

ТЕОРЕМА. *Полиномиальное линейное представление группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ всегда эквивалентно прямой сумме однородных полиномиальных линейных представлений.*

§ 2. Представления полной линейной группы

Пусть F — однородное полиномиальное представление полной линейной группы $\Gamma = \mathbf{GL}(n, \Omega)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Мы докажем, что F можно однозначно продолжить с группы Γ до гомоморфизма некоторой полупростой алгебры A_n^f (f — степень представления¹⁾), в которую группа Γ вкладывается. Отсюда будет следовать, что Γ — редуктивная группа. Ключевой момент этого подхода состоит в изучении связи между однородными представлениями группы Γ и некоторыми представлениями симметрических групп. В течение всего параграфа мы будем опираться на результаты из приложения.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства $E (\cong \Omega^n)$. Положим $e_\alpha = e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_2} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_f}$ для каждого мульти-индекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_f) \in I^f$ ($I = \{1, 2, \dots, n\}$). Когда α

¹⁾ То есть размерность пространства, в котором оно действует. — Прим. перев.

пробегают I^f , векторы e_α образуют базис в $E^{\otimes f}$. Обозначим через $\mathcal{G}_f$ симметрическую группу перестановок f элементов. Если положить $\pi \cdot \alpha = (\alpha_{\pi^{-1}(1)}, \alpha_{\pi^{-1}(2)}, \dots, \alpha_{\pi^{-1}(f)})$ для $\pi \in \mathcal{G}_f$ и $\alpha \in I^f$, то соотношение $\pi \cdot e_\alpha = e_{\pi \cdot \alpha}$ корректным образом определяет на $E^{\otimes f}$ линейное действие группы $\mathcal{G}_f$. Естественно выяснить, каковы линейные конкомитанты этого действия. Пусть $\text{End}(E)$ обозначает $\text{Hom}(E, E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эндоморфизм $U \in \text{End}(E^{\otimes f})$ называется *бисимметрическим*, если $\pi U = U \pi$ для всех $\pi \in \mathcal{G}_f$.

Иначе говоря, U бисимметричен в том и только том случае, когда U — конкомитант группы $\mathcal{G}_f$ или когда U принадлежит коммутанту образа кольца $\Omega[\mathcal{G}_f]$ в $\text{End}(E^{\otimes f})$. Здесь $\Omega[\mathcal{G}_f]$ — групповое кольцо группы $\mathcal{G}_f$ над полем Ω . Теорема Машке утверждает, что кольцо $\Omega[\mathcal{G}_f]$ и, следовательно, его образ в $\text{End}(E^{\otimes f})$ полупросты. В силу теоремы перестановочности Шура это же верно для алгебры A_n^f бисимметрических эндоморфизмов пространства $E^{\otimes f}$. Это значит, что каждый конечномерный A_n^f -модуль разлагается в прямую сумму простых A_n^f -подмодулей, т. е. подпространств, инвариантных относительно A_n^f и не содержащих собственных инвариантных подпространств. Мы вскоре применим этот результат к теории представлений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть эндоморфизм $U \in \text{End}(E^{\otimes f})$ имеет матрицу $(u_{\alpha\beta})$, где $\alpha, \beta \in I^f$ (индексы упорядочены лексикографически). Тогда U бисимметричен в том и только том случае, когда для каждого $\pi \in \mathcal{G}_f$ имеем $u_{\alpha\beta} = u_{\pi \cdot \alpha, \pi \cdot \beta}$.

Доказательство. Из равенств $U(\pi \cdot e_\alpha) = \pi \cdot U(e_\alpha)$ и

$$U(e_{\pi \cdot \alpha}) = \sum_{\beta} u_{\pi \cdot \alpha, \beta} e_{\beta} = \sum_{\beta} u_{\pi \cdot \alpha, \pi \cdot \beta} e_{\pi \cdot \beta}$$

получаем, что

$$U(e_\alpha) = \pi^{-1} \cdot U(e_{\pi \cdot \alpha}) = \sum_{\beta} u_{\pi \cdot \alpha, \pi \cdot \beta} e_\beta.$$

Следовательно, $u_{\pi \cdot \alpha, \pi \cdot \beta} = u_{\alpha\beta}$ для всех π . Обратное рассуждение проводится аналогично. $\square$

Благодаря изоморфизму $\text{End}(E^{\otimes f}) \cong \text{End}(E)^{\otimes f}$ (отображающему $U_1 \otimes \dots \otimes U_f$ в эндоморфизм U , для которого $U(y_1 \otimes \dots \otimes y_f) = U_1(y_1) \otimes \dots \otimes U_f(y_f)$), можно рассмотреть тензорные представления $\Gamma \rightarrow \text{GL}(E^{\otimes f})$. Они определяются по правилу $X \rightarrow X^{\otimes f}$ для $X \in \Gamma$. Пусть $X \in \text{End}(E)$ и (x_{ij}) — его матрица. Тогда без труда находим, что матрица $X^{\otimes f}$ равна $(X_{\alpha\beta})$, где $X_{\alpha\beta} = x_{\alpha_1\beta_1} \dots x_{\alpha_f\beta_f}$ для каждой пары мульти-индексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_f)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_f)$ из I^f . Так как $X^{\otimes f}$, очевидно, бисимметричен, для любого $\pi \in \mathcal{G}_f$ имеет место равенство $X_{\alpha\beta} = X_{\pi \cdot \alpha, \pi \cdot \beta}$.

ЛЕММА. Допустим, что переменные x_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) алгебраически независимы над Ω . Тогда для данных $\alpha, \beta, \varepsilon, \mu \in I^f$ соотношение $X_{\alpha\beta} = X_{\varepsilon\mu}$ выполняется в том и только том случае, когда существует такая перестановка $\pi \in \mathcal{G}_f$, что $\pi \cdot \alpha = \varepsilon$ и $\pi \cdot \beta = \mu$.

Доказательство. Будем действовать индукцией по f . Случай $f=1$ тривиален. Запишем, далее, $X_{\alpha\beta} = x_{\alpha_1\beta_1} \dots x_{\alpha_f\beta_f}$ и $X_{\varepsilon\mu} = x_{\varepsilon_1\mu_1} \dots x_{\varepsilon_f\mu_f}$. Должно найтись такое k , что $x_{\varepsilon_k\mu_k} = x_{\alpha_f\beta_f}$. Пусть π_0 — транспозиция, переставляющая k и f . Тогда $X_{\pi_0 \cdot \varepsilon, \pi_0 \cdot \mu} = (x_{\varepsilon_1\mu_1} \dots x_{\varepsilon_f\mu_f} \dots x_{\varepsilon_{f-1}\mu_{f-1}}) x_{\varepsilon_k\mu_k}$. Рассмотрим теперь новые мульти-индексы $\varepsilon', \mu' \in I^{f-1}$, где $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$, если $i \neq k$, $i < f$, и $\varepsilon'_k = \varepsilon_f$ и где μ' определено таким же образом. Положим $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{f-1})$ и $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_{f-1})$. В силу индуктивного предположения существует такой элемент $\pi' \in \mathcal{G}_{f-1}$, что $\pi' \cdot \alpha' = \varepsilon'$ и $\pi' \cdot \beta' = \mu'$. Распространяя π' до преобразования из группы $\mathcal{G}_f$ по правилу $\pi'(f) = f$, найдем, что $\pi' \cdot \alpha = \pi_0 \cdot \varepsilon$ и $\pi' \cdot \beta = \pi_0 \cdot \mu$. $\square$

Матричные элементы любого однородного (полиномиального) представления $F: \Gamma \rightarrow \mathbf{GL}(N, \Omega)$ степени f можно записать в виде $F_{hk}(X) = \sum_{\alpha, \beta} a_{hka\beta} X_{\alpha\beta}$ (суммирование по всем $\alpha, \beta \in I^f$). Если потребовать, чтобы $a_{hka\beta} = a_{hk, \pi.\alpha, \pi.\beta}$ для всех $\pi \in \mathcal{G}_f$, то в силу последней леммы это представление единственно. Обозначая через $M_N(\Omega)$ алгебру $N \times N$ -матриц над полем Ω , определим линейное отображение $G: A_n^f \rightarrow M_N(\Omega) = \text{End}(\Omega^N)$, где $G_{hk}(U) = \sum_{\alpha, \beta} a_{hka\beta} u_{\alpha\beta}$.

На самом деле G является гомоморфизмом, ибо, прежде всего, из полиномиальности F вытекает, что для всех $X, Y \in \Gamma$ должно выполняться $F(XY) = F(X)F(Y)$. В силу принципа устранимости это же верно для всех $X, Y \in \text{End}(E)$. Устранимые неравенства здесь $\det(X) \neq 0$ и $\det(Y) \neq 0$. Теперь $F(X) = G(X^{\otimes f})$, и поскольку $(XY)^{\otimes f} = X^{\otimes f}Y^{\otimes f}$ ($X \rightarrow X^{\otimes f}$ — представление), имеем, конечно, $G(X^{\otimes f}Y^{\otimes f}) = F(XY) = F(X)F(Y) = G(X^{\otimes f})G(Y^{\otimes f})$. Таким образом, доказательство нашего утверждения будет завершено, если установить следующую лемму.

ЛЕММА. *Подалгебра A_n^f кольца $\text{End}(E^{\otimes f})$ порождена элементами вида $X^{\otimes f}$ для всех $X \in \text{End}(E)$.*

Доказательство. Допустим, что имеется соотношение $\sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} X_{\alpha\beta} = 0$, выполняющееся для всех $X \in \text{End}(E)$ и такое, что $b_{\pi.\alpha, \pi.\beta} = b_{\alpha\beta}$ для всех $\pi \in \mathcal{G}_f$. Каждое $b_{\alpha\beta}$ непременно равно нулю, ибо Ω — поле характеристики 0. Но если элементы $X^{\otimes f}$ порождают алгебру B , то найденное соотношение означает, что единственным вектором $(b_{\alpha\beta}) \in A_n^f$, перпендикулярным к B , является $(b_{\alpha\beta}) = 0$. Это возможно, только если $B = A_n^f$.

ТЕОРЕМА. *Каждое однородное полиномиальное представление*

$$F: \mathbf{GL}(n, \Omega) \rightarrow \mathbf{GL}(N, \Omega)$$

степени f единственным образом представляется в виде $X \rightarrow X^{\otimes f} \rightarrow G(X^{\otimes f})$, где G — гомоморфизм алгебры A_n^f в $M_N(\Omega)$.

Доказательство. Из утверждений теоремы мы не проверили лишь единственность морфизма G , но она следует из предыдущей леммы.

Отметим, что теорема справедлива для любого поля характеристики 0. Следующая теорема является основной в этом параграфе.

ТЕОРЕМА. Полная линейная группа $GL(n, \Omega)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 редуцируема. Тем самым каждое ее рациональное линейное представление вполне приводимо.

Доказательство. На основании результатов предыдущего параграфа слово «рациональное» можно заменить на «полиномиальное», а «полиномиальное» на «однородное полиномиальное». Для однородных полиномиальных представлений теорема следует из предыдущей теоремы и того факта, что алгебра A_n^f полупроста.

§ 3. Диаграммы Юнга

Перейдем теперь к задаче определения всех характеров или 1-мерных представлений группы $GL(n, \Omega)$. Каждое 1-мерное полиномиальное представление группы $GL(n, \Omega)$ в силу § 1 однородно степени f и индуцирует, следовательно, 1-мерное представление алгебры A_n^f , которое, в свою очередь, должно определять простой A_n^f -модуль. В силу части IV приложения каждый простой A_n^f -модуль изоморфен модулю вида $b \cdot E^{\otimes f}$, где b порождает минимальный левый идеал образа кольца $\Omega[\mathcal{G}_f]$ в $\text{End}(E^{\otimes f})$. Таким образом, мы пришли к рассмотрению двух задач:

- (i) Классифицировать все минимальные левые идеалы алгебры $\Omega[\mathcal{G}_f]$ (задавая их образующими)

и

(ii) Используя (i), найти все A_n^f -подмодули в $E^{\otimes f}$ размерности 1 (над Ω).

В этом разделе мы рассмотрим первую задачу, решение которой принадлежит Фробениусу и А. Юнгу (1901—1903 гг.). Наше изложение будет основано на подходе фон Неймана и Ван-дер-Вардена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Системой Юнга* (Young's frame) называется последовательность $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ таких целых чисел, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r \geq 1$. Числом клеток системы α назовем целое число $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i$. *Диаграмма Юнга* Σ_α , соответствующая системе α , есть двойная последовательность (m_{ij_i}) , $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j_i \leq \alpha_i$, различных целых чисел, заключенных между 1 и числом клеток f ¹⁾.

В дальнейшем мы будем изучать лишь системы с фиксированным числом клеток f . Заметим, что диаграмму Σ_α можно расписать следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} m_{11} & & m_{12} & \dots & m_{1\alpha_1} \\ m_{21} & & m_{22} & \dots & m_{2\alpha_2} \\ \vdots & & & & \\ m_{r1} & \dots & & & m_{r\alpha_r} \end{array}$$

Группа $\mathcal{G}_f$ действует на диаграмме Σ_α , если определить $s \cdot \Sigma_\alpha$ ($s \in \mathcal{G}_f$) как диаграмму (m'_{ij_i}) с $m'_{ij_i} = s \cdot m_{ij_i}$. Соответствующая система равна α .

В $\mathcal{G}_f$ имеются две важные подгруппы, определяемые диаграммой Σ_α . Первая, $\mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ — это подгруппа в $\mathcal{G}_f$, оставляющая на месте каждую строку из Σ_α ,

¹⁾ Теория диаграмм Юнга, а также ее связь с представлениями симметрических групп изложены в «Современной алгебре» Ван-дер-Вардена, том 2, § 129. — Прим. перев.

а вторая, $\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$ — подгруппа, оставляющая на месте каждый столбец. Отметим следующие факты:

- (i) $\mathcal{R}(\Sigma_\alpha) \cap \mathcal{C}(\Sigma_\alpha) = \{e\}$;
- (ii) Если $s \in \mathcal{G}_f$, то $\mathcal{R}(s \cdot \Sigma_\alpha) = s\mathcal{R}(\Sigma_\alpha)s^{-1}$ и $\mathcal{C}(s \cdot \Sigma_\alpha) = s\mathcal{C}(\Sigma_\alpha)s^{-1}$.

Упорядочим лексикографически системы α , т. е. скажем, что $\alpha' > \alpha$, если $\alpha'_i > \alpha_i$ для наименьшего i , для которого $\alpha'_i \neq \alpha_i$. Следующая комбинаторная лемма, принадлежащая фон Нейману, является в нашем рассуждении основной.

ЛЕММА. Пусть $\Sigma_\alpha, \Sigma'_\beta$ — две такие диаграммы Юнга, что $\alpha \geq \beta$. Тогда или

- (i) найдутся различные целые числа из $\{1, \dots, f\}$, содержащиеся в одной строке из Σ_α и в одном столбце из Σ'_β ,

или

- (ii) $\alpha = \beta$ и $\Sigma'_\alpha = pq \cdot \Sigma_\alpha$ для некоторых $p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ и $q \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$.

Доказательство. Предположим, что (i) неверно. Поскольку $\alpha \geq \beta$, имеем $\alpha_1 \geq \beta_1$. Если $\alpha_1 > \beta_1$, то число столбцов в Σ_β меньше чем α_1 . Это влечет за собой существование двух элементов первой строки из Σ_α , которые должны принадлежать одному столбцу Σ'_β . Но так как (i) не выполняется, это невозможно, и потому $\alpha_1 = \beta_1$. Поскольку никакие два различных элемента первой строки в Σ_α не лежат в одном столбце в Σ'_β , существует такой элемент $q'_1 \in \mathcal{C}(\Sigma'_\beta)$, что первая строка диаграммы $q'_1 \cdot \Sigma'_\beta$ имеет те же элементы, что и первая строка из Σ_α .

Теперь можно забыть про первые строки диаграмм Σ_α и $q'_1 \cdot \Sigma'_\beta$ (которые совпадают с точностью до порядка) и показать, используя определение лексикографического упорядочения, что, аналогично, $\alpha_2 = \beta_2$ и существует такой элемент $q'_2 \in \mathcal{C}(\Sigma'_\beta)$, что Σ_α и $q'_2 q'_1 \cdot \Sigma'_\beta$ имеют одинаковые первые и вторые

строки. Так как у α и β одно и то же число клеток, этот процесс должен дать равенство $\alpha = \beta$ и существование такого элемента $q' \in \mathcal{C}(\Sigma'_\beta)$, что $q' \cdot \Sigma'_\beta = p \cdot \Sigma_\alpha$ для некоторого $p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$. Следовательно, $\Sigma'_\beta = q'^{-1} p \cdot \Sigma_\alpha = p (p^{-1} q'^{-1} p) \Sigma_\alpha$. Но $q'^{-1} \in \mathcal{C}(p \cdot \Sigma_\alpha) = p \mathcal{C}(\Sigma_\alpha) p^{-1}$, ибо $q'^{-1} \in \mathcal{C}(q' \cdot \Sigma'_\beta) = q' \mathcal{C}(\Sigma'_\beta) q'^{-1}$, так что $p^{-1} q'^{-1} p = q \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$.

Следствие. Допустим, что элемент $s \in \mathcal{G}_f$ не выразим в виде pq ни при каких $p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ и $q \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$. Тогда существуют такие транспозиции $u \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ и $v \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$, что $us = sv$.

Доказательство. Так как для Σ_α и $\Sigma'_\alpha = s \cdot \Sigma_\alpha$ утверждение (ii) леммы не выполняется, найдутся $a, b \in \{1, \dots, f\}$, которые лежат в одной строке в Σ_α и в одном столбце в $s \cdot \Sigma_\alpha$. Пусть $u \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ — транспозиция, переставляющая a и b , и $v = s^{-1}us$. Очевидно, что $v \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$, а это доказывает следствие. $\square$

Найдем теперь минимальные левые идеалы группового кольца $A = \Omega[\mathcal{G}_f]$. Поставим для этого в соответствие диаграмме Юнга Σ_α перестановки $a_\alpha = \sum_{p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)} p$ и $b_\alpha = \sum_{q \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)} \varepsilon_q q$, где ε_q — сигнатура перестановки q ¹⁾.

Легко проверить следующие утверждения:

- 1) если $p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$, то $pa_\alpha = a_\alpha p = a_\alpha$,
и
2) если $q \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$, то $qb_\alpha = b_\alpha q = \varepsilon_q b_\alpha$.

ЛЕММА. Пусть $c_\alpha = a_\alpha b_\alpha$. Тогда $c_\alpha \neq 0$.

Теперь мы можем доказать наш первый основной результат.

Предложение 1. Ac_α — минимальный левый идеал в A .

Нужны две предварительные леммы.

¹⁾ Которая равна $(-1)^a$, где a — четность перестановки. — Прим. перев.

ЛЕММА 1. Чтобы элемент $x \in A$ удовлетворял условию $rxq = \varepsilon_q x$ для каждого $r \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ и каждого $q \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы $x = \mu c_\alpha$ при некотором $\mu \in \Omega$.

ЛЕММА 2. Для всех $u \in A$ имеем $a_\alpha u b_\alpha = \mu c_\alpha$ при некотором $\mu \in \Omega$.

Доказательство. Лемма 2 вытекает из леммы 1, ибо $x = a_\alpha u b_\alpha$ обладает свойством, указанным в лемме 1. Чтобы получить последнюю, заметим сначала, что $rc_\alpha q = ra_\alpha b_\alpha q = \varepsilon_q a_\alpha b_\alpha = \varepsilon_q c_\alpha$. Для доказательства обратного положим $x = \sum_{s \in \mathcal{G}_f} \lambda_s s$.

Условие $rxq = \varepsilon_q x$ влечет за собой $\lambda_{pq} = \varepsilon_q \lambda_e$. Если $s \in \mathcal{G}_f$ не представим в виде pq , то существуют такие транспозиции $u \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$ и $v \in \mathcal{C}(\Sigma_\alpha)$, что $usv^{-1} = s$. Применяя условие леммы к uxv^{-1} , находим, что $\lambda_{usv^{-1}} usv^{-1} = \varepsilon_v^{-1} \lambda_s s$. Но тогда $\lambda_s = -\lambda_s$, т. е. $\lambda_s = 0$. Отсюда следует, что

$$x = \sum_{p, q} \lambda_{pq} pq = \lambda_e \sum_{p, q} \varepsilon_q pq = \lambda_e c_\alpha.$$

Таким образом, необходимость имеет место.

Доказательство предложения 1. Пусть $\mathcal{L} \neq \{0\}$ — такой левый идеал в A , что $\mathcal{L} \subset Ac_\alpha$. Тогда по лемме 2 $c_\alpha \mathcal{L} \subset c_\alpha Ac_\alpha \subset a_\alpha Ab_\alpha \subset \Omega c_\alpha$. Поэтому идеал $c_\alpha \mathcal{L}$ должен равняться $\{0\}$ или Ωc_α . Первая возможность не может реализоваться, поскольку $Ac_\alpha \mathcal{L} \supset \mathcal{L}^2 \neq \{0\}$ ($\mathcal{L}^2 \neq \{0\}$, так как кольцо A полупросто). Итак, $c_\alpha \mathcal{L} = \Omega c_\alpha$, и потому $Ac_\alpha = Ac_\alpha \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, т. е. $\mathcal{L} = Ac_\alpha$. Следовательно, идеал Ac_α минимален.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что $\alpha \neq \beta$. Тогда минимальные левые идеалы Ac_α и Ac_β , отвечающие диаграммам Σ_α и Σ_β , не изоморфны (как A -модули).

Доказательство. Можно считать, что $\alpha > \beta$. Мы утверждаем, что $c_\alpha Ac_\beta = \{0\}$, и потому $(Ac_\alpha)(Ac_\beta) = \{0\}$. Таким образом, невозможно, чтобы модули Ac_α и Ac_β были изоморфны. Для проверки нашего утвер-

ждения достаточно показать, что $a_\alpha s b_\beta = 0$ для всех $s \in \mathcal{G}_f$. Прежде всего, $a_\alpha b_\beta = 0$. Поскольку $\alpha > \beta$, должны найтись два различных целых числа i, j , принадлежащих одной строке в Σ_α и одному столбцу в Σ_β . Пусть t — транспозиция, переставляющая i и j . Тогда $t \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha) \cap \mathcal{C}(\Sigma_\beta)$, так что $a_\alpha t = a_\alpha$ и $t^{-1} b_\beta = -b_\beta$. Это дает $a_\alpha b_\beta = -a_\alpha b_\beta$, откуда $a_\alpha b_\beta = 0$. Наконец, $a_\alpha s b_\beta s^{-1} = 0$, так как $s b_\beta s^{-1}$ есть элемент b_β , соответствующий диаграмме $\Sigma'_\beta = s \cdot \Sigma_\beta$. Из этого следует нужный результат.

Предложение 3. *Каждый минимальный левый идеал кольца A изоморфен некоторому идеалу вида As_α .*

Доказательство. Прежде всего, хорошо известно, что перестановка $s \in \mathcal{G}_f$ однозначно разлагается на циклы $(i_1, \dots, i_r)$ и что перестановки сопряжены тогда и только тогда, когда длины их циклов одинаковы. Таким образом, число систем α в точности равно числу классов сопряженных элементов в $\mathcal{G}_f$. На основании части IV приложения это в точности число классов изоморфизма минимальных левых идеалов в A , и доказательство следует теперь из предложения 2.

Мы показали, что число классов изоморфизма минимальных левых идеалов кольца $\Omega[\mathcal{G}_f]$ равно числу систем с f клетками. Из этого вытекает, что если c_α и c'_α отвечают одной и той же системе (но разным диаграммам), то $As_\alpha \cong As'_\alpha$.

§ 4. Характеры группы $GL(n, \Omega)$

Перейдем теперь ко второй задаче, именно к определению 1-мерных A_n^f -подмодулей в $E^{\otimes f}$. В силу § 3 и части IV приложения каждый простой A_n^f -модуль изоморфен модулю вида $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$, где α — система с f клетками (хотя многие $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$ равны $\{0\}$ из-за того обстоятельства, что представление $\Omega[\mathcal{G}_f] \rightarrow \text{End}(E^{\otimes f})$ не всегда точно). Если c_α и c'_α (соответ-

можно отождествить с m -вектором ($m = \beta_i$), ибо Ω — поле характеристики 0. Так как для $m > n = \dim E$ m -вектор равен нулю, получаем первый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $c_\alpha \cdot E^{\otimes f} = \{0\}$ тогда (и только тогда), когда первый столбец в α имеет длину, большую чем n .

ПРИМЕР. Если α состоит только из одной строки, то $c_\alpha = a_\alpha$ и $c_\alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x_f) = \sum_{s \in \mathcal{S}_f} s(x_1 \otimes \dots \otimes x_f)$.

Таким образом, c_α — оператор симметризации $\underline{s}$. Если α имеет только один столбец, то $c_\alpha = b_\alpha$ и $c_\alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x_f) = \underline{a}(x_1 \otimes \dots \otimes x_f)$. В случае $f=2$ (имеются лишь две системы) получаем классический результат. Именно, каждый тензор порядка два однозначно разлагается в сумму симметрического и кососимметрического тензоров. В случае $f=3$ имеется дополнительная система и могут появиться другие неприводимые тензоры.

Говорят, что тензоры из Σ_α имеют *сигнатуру* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. В частности, альтернированный тензор¹⁾ имеет сигнатуру $(1, 1, \dots, 1)$, а симметрический — $(f, 0, \dots, 0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Чтобы пространство Σ_α было одномерным, необходимо и достаточно, чтобы каждый столбец в α имел длину $n = \dim E$.

Доказательство. Так как n -я внешняя степень пространства E одномерна, то в силу (1) достаточность очевидна. Предположим теперь, что при некотором $h \leq r$ $n = \beta_1 = \dots = \beta_{h-1} > \beta_h = \dots = \beta_m \geq \dots$. Выберем базис $e_1, \dots, e_n$ пространства E и введем векторы $y_i = e_1 \otimes \dots \otimes e_{\beta_i}$. Тогда $c_\alpha(y_1 \otimes \dots \otimes y_r) = k \underline{a}(y_1) \otimes \dots \otimes \underline{a}(y_r)$, где k — порядок группы $\mathcal{R}(\Sigma_\alpha)$. Из внешней алгебры вытекает, что $c_\alpha(y_1 \otimes \dots \otimes y_r) \neq 0$.

¹⁾ То есть кососимметрический тензор. — Прим. перев.

Пусть теперь m' — такое целое число, что $\beta_h < m' \leq n$, и s — транспозиция, переставляющая β_h и m' . Рассмотрим векторы

$$y'_i = \begin{cases} s(y_i), & \text{если } i < h, \\ e_i \otimes \dots \otimes e_{\beta_h-1} \otimes e_{m'}, & \text{если } h \leq i \leq m, \\ y_i, & \text{если } i > m. \end{cases}$$

Пусть $z = x_1 \otimes \dots \otimes x_f$, и пусть $p \in \mathcal{G}_f$. Тогда $p \cdot z = x'_1 \otimes \dots \otimes x'_f$, где $x'_i = x_{p^{-1}(i)}$. Введем $y_1^p = x'_1 \otimes \dots \otimes x'_{\beta_1}$; $y_2^p = x'_{\beta_1+1} \otimes \dots \otimes x'_{\beta_1+\beta_2}$, и т. д. Тогда

$$c_\alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x_f) = \sum_{p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)} \underline{a}(y_1^p) \otimes \dots \otimes \underline{a}(y_r^p) \quad (1)$$

и

$$\begin{aligned} c_\alpha(y'_1 \otimes \dots \otimes y'_r) &= k \underline{a}(y'_1) \otimes \dots \otimes \underline{a}(y'_r) = \\ &= \pm k \underline{a}(y_1) \otimes \dots \otimes \underline{a}(y_{h-1}) \otimes \underline{a}(y'_h) \otimes \dots \otimes \underline{a}(y'_r). \end{aligned}$$

Рассматривая базис пространства

$$\underbrace{\underline{a}(E^{\otimes n}) \otimes \dots \otimes \underline{a}(E^{\otimes n})}_{h-1} \otimes \underbrace{\underline{a}(E^{\otimes \beta_h}) \otimes \dots \otimes \underline{a}(E^{\otimes \beta_h})}_{m-h} \otimes \dots,$$

где $\underline{a}(E^{\otimes i})$ обозначает i -ю внешнюю степень пространства E , убеждаемся в том, что формы $c_\alpha(y_1 \otimes \dots \otimes y_r)$ и $c_\alpha(y'_1 \otimes \dots \otimes y'_r)$ линейно независимы. Итак, если $\beta_h < n$, то размерность пространства $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$ не меньше двух, что противоречит нашему предположению. $\square$

Пусть теперь $X \in \mathbf{GL}(n, \Omega)$ и α — прямоугольная система $(g, g, \dots, g)$ с n строками. Имеем $f = gn$ и

$$\begin{aligned} X^{\otimes f} \cdot (c_\alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x_f)) &= \\ &= \sum_{p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)} \underline{a}(X^{\otimes n} y_1^p) \otimes \dots \otimes \underline{a}(X^{\otimes n} y_g^p) = \\ &= \det(X)^g \sum_{p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)} \underline{a}(y_1^p) \otimes \dots \otimes \underline{a}(y_g^p) = \\ &= \det(X)^g c_\alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x_f). \end{aligned}$$

Следовательно, $X^{\otimes f} | c_\alpha \cdot E^{\otimes f} {}^1)$ является умножением на $\det(X)^g$. Таким образом, любые два A_n^f -модуля размерности один (над Ω) должны быть изоморфны как модули. Итак, любое одномерное (и потому однородное) полиномиальное представление F группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ степени f определяет два изоморфных A_n^f -модуля $c_\alpha \cdot E^{\otimes f} \cong \Omega$. Поскольку $c_\alpha(y \otimes \dots \otimes y)$, $y = e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, порождает $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$, отсюда следует, что $F(x) = \det(X)^g$, если изоморфизм²⁾ выбрать в виде

$$c_\alpha(y \otimes \dots \otimes y) \rightarrow 1.$$

ТЕОРЕМА. *Каждый рациональный абелев характер группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ имеет вид $X \rightarrow \det(X)^g$ при некотором целом g .*

§ 5. Полилинейные инварианты группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$

Теперь мы в состоянии найти полилинейные одновременные относительные инварианты произвольного числа векторов в $E = \Omega^n$ по отношению к группе $\Gamma = \mathbf{GL}(n, \Omega)$. Пусть $v: E^{\otimes f} \rightarrow \Omega$ — линейный (одновременный) относительный инвариант, и предположим, что $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$ — неприводимое Γ -инвариантное подпространство в $E^{\otimes f}$, отвечающее системе Юнга α . Полагая $v_\alpha = v | c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$, заметим, что по лемме Шура v_α — или 0 или биекция. Следовательно, $v_\alpha = 0$, если только $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$ не одномерно, и поскольку $E^{\otimes f}$ — прямая сумма неприводимых подпространств, нетривиальные линейные относительные инварианты на $E^{\otimes f}$ существуют только тогда, когда $f = gn$ при некотором целом g . Другой способ усмотреть это состоит в доказательстве того, что v определяет на E полиномиальный характер степени f , и в применении последнего параграфа.

¹⁾ Вертикальная черта обозначает здесь ограничение линейного преобразования на подпространство. — Прим. перев.

²⁾ Между пространствами $c_\alpha \cdot E^{\otimes f}$ и Ω . — Прим. перев.

Пусть $x_1, \dots, x_n \in E$ — векторы и $x_i = \sum \xi_i^j e_j$. Определим скобку $[x_1 \dots x_n]$ векторов $x_1, \dots, x_n$ как определитель $\det(\xi_i^j)$. Скобка является полилинейным инвариантом веса один. (Так как вес любого относительного инварианта равен $\det(X)^g$ с некоторым целым g , то мы будем называть весом просто число g .) Следующая теорема является первым вариантом первой основной теоремы об инвариантах.

ТЕОРЕМА. Полилинейные инварианты f векторов в $E = \Omega^n$ относительно группы $GL(n, \Omega)$ существуют только тогда, когда f является кратным n , скажем $f = gn$. Каждый такой инвариант будет линейной комбинацией инвариантов вида

$$[x_{i_1} \dots x_{i_n}] [x_{i_{n+1}} \dots x_{i_{2n}}] \dots [x_{i_{(f-n+1)}} \dots x_{i_f}], \quad (1)$$

где $(i_1, \dots, i_f)$ — произвольная перестановка из группы $\mathcal{G}_f$. Вес такого инварианта равен g .

Доказательство. Первое утверждение следует из предложения 4 главы 1 и сделанных выше замечаний. Если u — полилинейный инвариант $f = gn$ векторов, заменим u на линейный инвариант v на $E^{\otimes f}$. Допустим, что $\alpha = (g, g, \dots, g)$ — единственная система, для которой E_α имеет размерность один. Если $c_\alpha^{(1)} \cdot E^{\otimes f}, \dots, c_\alpha^{(r)} \cdot E^{\otimes f}$ — одномерные неприводимые подпространства, входящие в разложение пространства $E^{\otimes f}$ в прямую сумму, то

$$v(x_1 \otimes \dots \otimes x_f) = \sum_{i=1}^r v(c_\alpha^{(i)}(x_1 \otimes \dots \otimes x_f)).$$

Поскольку $a(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = [x_1 \dots x_n] a(e_1 \otimes \dots \otimes e_n)$, из вычислений последнего параграфа вытекает, что

$$\begin{aligned} v(c_\alpha(x_1 \otimes \dots \otimes x_f)) &= \\ &= \sum_{p \in \mathcal{R}(\Sigma_\alpha)} \lambda_p [x_{p(1)} \dots x_{p(n)}] \dots [x_{p(f-n+1)} \dots x_{p(f)}] \end{aligned}$$

с $\lambda_p \in \Omega$. Этим доказательство завершается. $\square$

Таким образом, абсолютных полилинейных инвариантов группы $GL(n, \Omega)$ не существует. Рациональные абсолютные инварианты, однако, легко построить. Например,

$$[x_1 x_2][x_3 x_4]/[x_1 x_3][x_2 x_4],$$

скрещенное отношение четырех векторов на плоскости, является абсолютным инвариантом.

Рассмотрим теперь некоторые применения этой теоремы.

(1) *Полилинейные инварианты нескольких тензоров*

Предположим, что для $i = 1, \dots, r$ заданы пространства тензоров $M_i = E^{\otimes f_i}$ и полилинейный инвариант $u: M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow \Omega$. Пусть $v: M_1 \otimes \dots \otimes M_r \rightarrow \Omega$ — соответствующий линейный инвариант. Рассмотрим для каждого $i = 1, \dots, r$ разложимые тензоры $z_i = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{f_i} \in M_i$. В силу свойства универсальности тензорного произведения отображение $w(x_1, \dots, x_{f_1}, x_1, \dots, x_{f_r}) = v(z_1 \otimes \dots \otimes z_r)$ должно быть полилинейным инвариантом $f = \sum f_i$ векторов из E , так что $f = gn$ и w обязательно имеет вид (1). Отображение w полностью определяет v , и форму v можно найти по w с помощью так называемого *первого процесса восстановления*.

Опишем теперь этот процесс. Предположим, что в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства E векторы x_k имеют компоненты $(\xi_j^{k1}, \dots, \xi_j^{kn})$. Тогда, полагая для простоты $f_j = s$, имеем

$$z_j = \sum_i \xi_j^{1l_1} \cdot \xi_j^{2l_2} \dots \xi_j^{sl_s} e_{l_1} \otimes \dots \otimes e_{l_s},$$

где суммирование проводится по всем индексам $l_1, \dots, l_s$ с $1 \leq l_1, \dots, l_s \leq n$. Для произвольного тензора $y_j = \sum_i \xi_j^{l_1 \dots l_s} e_{l_1} \otimes \dots \otimes e_{l_s}$ пространства M_j форма $v(y_1 \otimes \dots \otimes y_r)$ получается заменой для

всех j каждой компоненты $\xi_j^{l_1} \dots \xi_j^{l_s}$ тензора z_j в выражении для $v(z_1 \otimes \dots \otimes z_r)$ на соответствующую компоненту $\zeta_j^{l_1 \dots l_s}$ тензора y_j .

Возьмем, например, $n=3$, $M_1 = E \otimes E$ и $M_2 = E$. Рассмотрим полилинейный инвариант на $E \times E \times E$, задаваемый скобкой $[x_1 x_2 x]$. Запишем

$$x_1 = \xi_{11}^{11} e_1 + \xi_{11}^{12} e_2 + \xi_{11}^{13} e_3, \quad x_2 = \xi_{11}^{21} e_1 + \xi_{11}^{22} e_2 + \xi_{11}^{23} e_3$$

и

$$x = \eta^1 e_1 + \eta^2 e_2 + \eta^3 e_3.$$

Тогда

$$[x_1 x_2 x] = \eta^1 (\xi_{11}^{12} \xi_{11}^{23} - \xi_{11}^{13} \xi_{11}^{22}) + \eta^2 (\xi_{11}^{11} \xi_{11}^{23} - \xi_{11}^{13} \xi_{11}^{21}) + \\ + \eta^3 (\xi_{11}^{11} \xi_{11}^{22} - \xi_{11}^{12} \xi_{11}^{21}).$$

Если компонентами $y \in E \otimes E$ являются ζ^{ij} , то, заменяя $\xi_{11}^{ij} \xi_{11}^{kl}$ на ζ^{ij} , получаем инвариант

$$v(y, x) = \eta^1 (\zeta^{23} - \zeta^{32}) + \eta^2 (\zeta^{13} - \zeta^{31}) + \eta^3 (\zeta^{12} - \zeta^{21})$$

на пространстве $M_1 \times M_2$. Инвариант $[x_1 x_2 x]$ называется *символическим выражением* инварианта v .

(2) Однородные инварианты нескольких тензоров

Допустим, что f — однородный полиномиальный инвариант трех тензоров $x \in E^{\otimes p}$, $y \in E^{\otimes q}$ и $z \in E^{\otimes r}$ степеней h по компонентам тензора x , h' по компонентам y и h'' по компонентам z . Поляризуя f , находим полилинейный инвариант u тензоров $x, \dots$ $\dots, x \in E^{\otimes p}, y, \dots, y \in E^{\otimes q}$ и $z, \dots, z \in E^{\otimes r}$. Следовательно, степени h, h' и h'' должны удовлетворять соотношению $hp + h'q + h''r = gn$. В силу по-

следнего примера мы приходим к рассмотрению полилинейных инвариантов u от gn векторов $x, \dots$ $\dots, x, x, \dots, x, \dots, x, y, \dots, y, z, \dots, z \in E$. Чтобы найти f , необходимо два раза восстановить символическое выражение для u .

Возьмем, например, $n=2$ и вычислим все однородные инварианты степени два на $E \otimes E$. В этом случае $p=2, h=2, n=2$, так что $g=2$. Запишем $x = \sum \zeta^{ij} e_i \otimes e_j$ и введем $x = \sum \zeta^{ij} e_i \otimes e_j$ и $x = \sum \zeta^{ij} e_i \otimes e_j$. Продолжая, построим $x, x, x, x \in E$

с $x = \xi^{s1} e_1 + \xi^{s2} e_2$. Рассмотрим сначала инвариант

$$[x \ x][x \ x] = (\xi^{11}_1 \xi^{22}_2 - \xi^{12}_1 \xi^{21}_2) (\xi^{21}_1 \xi^{12}_2 - \xi^{22}_1 \xi^{11}_2).$$

Первое восстановление дает инвариант

$$\zeta^{11}_1 \zeta^{22}_2 - \zeta^{12}_1 \zeta^{12}_2 - \zeta^{21}_1 \zeta^{21}_2 + \zeta^{22}_1 \zeta^{11}_2$$

от x и x . Окончательное восстановление (которое уничтожает нижние индексы) приводит к однородному инварианту $2\zeta^{11}\zeta^{22} - (\zeta^{12})^2 - (\zeta^{21})^2$ на $E \otimes E$. Начиная с символического выражения $[x \ x][x \ x]$, находим инвариант $(\zeta^{12} - \zeta^{21})^2$, а начиная с $[x \ x][x \ x]$, — инвариант $2(\zeta^{11}\zeta^{22} - \zeta^{12}\zeta^{21})$. Таким образом, каждый однородный инвариант степени два на $E \otimes E$ является линейной комбинацией этих трех инвариантов.

(3. Полилинейные инварианты неприводимых тензоров

Изучим теперь ситуацию, когда f — билинейный инвариант от $x \in c_\alpha \cdot E^{\otimes p}$ и $y \in c'_\beta \cdot E^{\otimes q}$. Имеем $f(\sigma \cdot x, \sigma \cdot y) = (\det \sigma)^g f(x, y)$ при $\sigma \in GL(n, \Omega)$. В силу приложения $c_\alpha^2 = \mu_\alpha c_\alpha$ и $c_\beta'^2 = \mu'_\beta c'_\beta$ для некоторых не-

нулевых чисел μ_α и $\mu'_\beta \in \Omega$. Если $u \in E^{\otimes p}$ и $v \in E^{\otimes q}$, то определим $\varphi(u, v) = f(c_\alpha u, c'_\beta v)$. Тогда по свойству перестановочности

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma \cdot u, \sigma \cdot v) &= f(c_\alpha \sigma \cdot u, c'_\beta \sigma \cdot v) = f(\sigma \cdot c_\alpha u, \sigma \cdot c'_\beta v) = \\ &= (\det \sigma)^g f(c_\alpha u, c'_\beta v) = (\det \sigma)^g \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что φ — билинейный инвариант на $E^{\otimes p} \times E^{\otimes q}$, для которого $\varphi(c_\alpha u, c'_\beta v) = \mu_\alpha \mu'_\beta f(c_\alpha u, c'_\beta v)$. Следовательно, мы пришли к предыдущей ситуации.

§ 6. Инварианты антисимметрических тензоров

Теперь мы приступим к изучению одного частного случая рассмотрений последнего параграфа, а именно полилинейных инвариантов антисимметрических тензоров. Это приведет нас к более общей формулировке основной теоремы. Напомним, что полилинейное отображение $f: E \times \dots \times E \rightarrow F$, зависящее от p век-

торов, называется альтернированным, если $f(x, \dots, \dots, x) = \varepsilon_\sigma f(x, \dots, x)$ для всех $\sigma \in \mathcal{G}_p$. В силу свойства универсальности p -й внешней степени $\bigwedge^p E$ отображение f определяет такой гомоморфизм $f': \bigwedge^p E \rightarrow F$, что $f(x, \dots, x) = f'(x \wedge \dots \wedge x)$. Группа $\mathbf{GL}(E)$ естественным образом действует на $\bigwedge^p E$ с помощью тензорного представления $U \rightarrow \bigwedge^p U$, где $\bigwedge^p U$ является изоморфизмом пространства $\bigwedge^p E$, индуцированным отображением

$$(x, \dots, x) \rightarrow U(x) \wedge \dots \wedge U(x).$$

Предположим, что $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n, \Omega)$ и g — полилинейный инвариант антисимметрического тензора u порядка $p < n$ (или, что эквивалентно, p -вектора u') и какого-то числа векторов $y, \dots, y \in E$. С g можно связать полилинейный инвариант f , задаваемый фор-

мулой $f(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q) = g(x^1 \wedge \dots \wedge x^p, y^1, \dots, y^q)$ при всех $x^1, \dots, x^p \in E$. Ясно, что f альтернировано по $x^1, \dots, x^p$. Обратно, если дан полилинейный инвариант $f(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$, то

$$g(x^1 \wedge \dots \wedge x^p, y^1, \dots, y^q) = \left(\frac{1}{p!}\right) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon_{\sigma} f(x^{\sigma(1)}, \dots, x^{\sigma(p)}, y^1, \dots, y^q)$$

определяет полилинейный инвариант p -вектора z и векторов $y^1, \dots, y^q$.

Когда Γ совпадает с $GL(n, \Omega)$, f будет произведением определителей от x и y . Особенно простым является тот случай, когда каждый вектор x содержится в одной скобке. Так как для всех $\sigma \in \mathcal{S}_p$ выполняется равенство $\varepsilon_{\sigma} [x^{\sigma(1)} \dots x^{\sigma(p)} y^1 \dots y^q] = [x^1 \dots x^p y^1 \dots y^q]$, $r = n - p$, то $g(u, y^1, \dots, y^q)$ получается (с точностью до множителя) разложением на основании правила Лапласа определителя $[x^1 \dots x^p y^1 \dots y^q]$ по первым p строкам и заменой на $\pi^{i_1 \dots i_p} ((i_1, \dots, i_p)$ -ю компоненту тензора u) минора, образованного этими строками и столбцами с индексами $i_1, \dots, i_p$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$.

Покажем теперь с помощью общего тождества теории инвариантов, что общий случай сводится к рассмотренному. Если имеется полином $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ от компонент векторов $z_1, \dots, z_m \in E$, то для $1 \leq k \leq m$ определим

$$\begin{aligned} \varphi_k(z_1, \dots, z_m) &= \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_{\sigma} \varphi(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}, z_{k+1}, \dots, z_m). \end{aligned} \quad (1)$$

Полиномы φ_k можно вычислить рекуррентно по k , применяя следующее тождество:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1}(z_1, \dots, z_m) &= \varphi_k(z_1, \dots, z_m) + \\ &+ \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} \varphi_k(z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_{k+1}, z_j, z_{k+2}, \dots, z_m), \end{aligned} \quad (2)$$

в котором выражения с $\hat{}$ должны быть опущены. Чтобы проверить тождество (2), рассмотрим для каждого j ($1 \leq j \leq k+1$) те члены в выражении для φ_{k+1} , для которых $\sigma(k+1) = j$. Определим отображение $\rho: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, j, \dots, k+1\}$ соотношениями $\rho(i) = i$ при $i < j$ и $\rho(i) = i+1$ при $i \geq j$. Для каждого $\sigma \in \mathcal{G}_{k+1}$, такого, что $\sigma(k+1) = j$, возьмем элемент $\pi = \rho^{-1}\sigma$ группы $\mathcal{G}_k$. Отображение $\sigma \rightarrow \pi$ является биекцией таких σ на $\mathcal{G}_k$. Кроме того, $\varepsilon_\sigma = (-1)^{k-j+1} \varepsilon_\pi$. Полагая $z'_i = z_{\rho(i)}$ при $i \leq k$, находим, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma(k+1)=j} \varepsilon_\sigma \varphi(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}, z_j, z_{k+2}, \dots, z_m) = \\ &= \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \varphi(z'_{\pi(1)}, \dots, z'_{\pi(k)}, z_j, z_{k+2}, \dots, z_m) \quad [\rho\pi = \sigma] = \\ &= (-1)^{k-j-1} \sum_{\pi} \varepsilon_\pi \varphi(z'_{\pi(1)}, \dots, z'_{\pi(k)}, z_j, \dots, z_m) = \\ &= (-1)^{k-j-1} \varphi_k(z'_1, \dots, z'_k, z_j, \dots, z_m) = \\ &= (-1)^{k-j-1} \varphi_k(z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_{k+1}, z_j, z_{k+2}, \dots, z_m). \end{aligned}$$

Наконец, суммируя по j , получаем требуемое тождество (2).

Обратимся теперь к полилинейному инварианту f вида $f(x, \dots, x, y, \dots, y) = [x \dots x y \dots y] u(x)$, где $k < p$, $p \leq n$, $r = n - k$ и $u(x)$ — линейная форма от x , коэффициенты которой зависят от $x, \dots, x$,

$y, \dots, y$. Поскольку $f_k = k!f$, формула (2) дает

$$f_{k+1}(x, \dots, x, y, \dots, y) = k! [x \dots x y \dots y] u(x) + \\ + k! \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j-1} [x \dots x^{j-1} x^{j+1} \dots x^{k+1} y \dots y] u(x).$$

Но так как u — линейная форма,

$$\begin{vmatrix} u(x) & \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x^{k+1}) & \xi_{k+1}^1 & \dots & \xi_{k+1}^n \\ u(y) & \eta_1^1 & \dots & \eta_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(y^r) & \eta_r^1 & \dots & \eta_r^n \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая это тождество по первому столбцу, получаем

$$\sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j [x \dots x^{j-1} x^{j+1} \dots x^{k+1} y \dots y] u(x) = \\ = (-1)^k \sum_{h=1}^r (-1)^h [x \dots x^{k+1} y \dots y^{h-1} y^{h+1} \dots y^r] u(y). \quad (3)$$

Но в силу (2) член, стоящий в формуле (3) с левой стороны, равен в точности $(-1)^{k+1} (k!)^{-1} f_{k+1}$, и последовательное применение наших рассуждений показывает, что f_p является суммой инвариантов, в каждом из которых векторы $x, \dots, x^p$ участвуют в одном и том же определителе.

В качестве приложения находим, что если инвариант $f(x^1, \dots, x^p, y^1, \dots, y^q)$ альтернирован по $x^1, \dots, x^p$, то $f_p = f$ с точностью до множителя $p!$. Таким образом, для f наш результат справедлив.

§ 7. Инварианты смешанных тензоров

Пусть E^* обозначает пространство $\text{Hom}(E, \Omega)$, двойственное к E . Группа $\mathbf{GL}(E)$ действует на E^* следующим образом: если $U \in \mathbf{GL}(E)$, то $\hat{U} \in \mathbf{GL}(E^*)$ определяется соотношением $\langle x, \hat{U}(x^*) \rangle = \langle U^{-1}(x), x^* \rangle$ для всех $x \in E$ и всех $x^* \in E^*$. Представление группы $\mathbf{GL}(E)$ в группе $\mathbf{GL}(E^*)$, задаваемое соответствием $U \rightarrow \hat{U}$, неприводимо. Пусть $T_q^p(E) = E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$ обозначает пространство смешанных тензоров порядка (p, q) , и пусть группа $\mathbf{GL}(E)$ действует на $T_q^p(E)$ с помощью тензорного представления $U \rightarrow U^{\otimes p} \otimes \hat{U}^{\otimes q}$. Элементы пространства $T_0^p(E)$ называются *контравариантными тензорами порядка p* , а элементы из $T_q^0(E)$ — *ковариантными тензорами порядка q* . Точке $x^* \in E^*$ соответствует единственный $(n-1)$ -вектор $\varphi(x^*) \in \bigwedge^{n-1} E$, характеризуемый соотношением $x \wedge \varphi(x^*) = \langle x, x^* \rangle e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ при всех $x \in E$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства E . Если x^* имеет в двойственном базисе в E^* компоненты $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, то

$$\varphi(x^*) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n.$$

Иначе говоря, i -я компонента $\pi^1 \dots \hat{\pi}^i \dots \pi^n$ вектора $\varphi(x^*)$ равна $(-1)^{i-1} \xi_i$. Отображение $\varphi: E^* \rightarrow \bigwedge^{n-1} E$ будет изоморфизмом, и простое вычисление показывает, что $U \cdot (\varphi(x^*)) = \det(U) \varphi(\hat{U} \cdot x^*)$ для всех $U \in \mathbf{GL}(E)$. Следовательно, представления $U \rightarrow \bigwedge^{n-1} U$ и $U \rightarrow \hat{U}$ эквивалентны.

Возьмем $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n, \Omega)$ и полилинейный инвариант f от p контравариантных векторов $x^1, \dots, x^p \in E$ и q ковариантных векторов $y'_1, \dots, y'_q \in E^*$. Чтобы найти f , с ним следует связать полилинейный инвариант от $x^1, \dots, x^p \in E$ и $z^1, \dots, z^q \in \bigwedge^{n-1} E$, полагая $h(x^1, \dots, x^p, z^1, \dots, z^q) = f(x^1, \dots, x^p, \varphi^{-1}(z^1), \dots, \varphi^{-1}(z^q))$.

Теперь можно применить методы предыдущего параграфа. Для изучения h нужно для каждого индекса j ($1 \leq j \leq q$) ввести $n-1$ контравариантных векторов z^{jk} ($1 \leq k \leq n-1$) и рассмотреть полилинейный инвариант h' от x и z , получаемый из h общим методом.

Когда $\Gamma = \mathbf{GL}(n, \Omega)$, инвариант h' является линейной комбинацией произведений определителей.

Так как h' альтернирован по $z^1, \dots, z^{1, n-1}$, можно предположить, что $h' = [z^1 \dots z^{1, n-1} \omega] h''$, где ω — один из оставшихся векторов, а h'' не содержит ни одного z^{1k} .

После восстановления векторов $z^1, \dots, z^{1, n-1}$ до z^1 и затем до $y'_1 = \varphi^{-1}(z^1)$ скобка $[z^1 \dots z^{1, n-1} \omega]$ превращается в $\langle \omega, y'_1 \rangle$. Можно продолжить восстановление этим способом, пока имеются скобки, содержащие хотя бы одно z^{jk} , получая линейные комбинации произведений, сомножители которых суть следующие выражения:

(i) контравариантные скобки $[x^{i_1} \dots x^{i_n}]$,

(ii) скалярные произведения $\langle x^i, y'_j \rangle$,

(iii) произведения вида $\langle z^{j_1}, y'_{i_1} \rangle \langle z^{j_2}, y'_{i_2} \rangle \dots \dots \langle z^{j, n-1}, y'_{i_{n-1}} \rangle$.

Антисимметризация произведения (iii) дает

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon_{\sigma} \langle \overset{j\sigma(1)}{z}, y'_{i_1} \rangle \dots \langle \overset{j\sigma(n-1)}{z}, y'_{i_{n-1}} \rangle &= \\ &= \det(\langle \overset{jk}{z}, y'_{i_r} \rangle) = \\ &= \langle \overset{j1}{z} \wedge \dots \wedge \overset{j, n-1}{z}, y'_{i_1} \wedge \dots \wedge y'_{i_{n-1}} \rangle. \end{aligned}$$

Допустим, что компоненты вектора $y' \in E^*$ равны $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и что $z = \varphi(y')$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle z, y'_{i_1} \wedge \dots \wedge y'_{i_{n-1}} \rangle &= \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i \langle e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n, \\ &\qquad\qquad\qquad y'_{i_1} \wedge \dots \wedge y'_{i_{n-1}} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \xi_i \det(\langle e_j, y'_{i_k} \rangle) \quad [j \neq i] = \\ &= [y' y'_{i_1} \dots y'_{i_{n-1}}]. \end{aligned}$$

Таким образом, восстановление скалярного произведения $\langle \overset{j1}{z} \wedge \dots \wedge \overset{j, n-1}{z}, y'_{i_1} \wedge \dots \wedge y'_{i_{n-1}} \rangle$ приводит к контравариантной скобке $[y'_j y'_{i_1} \dots y'_{i_{n-1}}]$, где $y'_j = \varphi^{-1}(z)$. Подытожим эти результаты во втором варианте первой основной теоремы теории инвариантов.

ТЕОРЕМА. *Каждый полилинейный относительный инвариант p векторов из E и q векторов из E^* группы $GL(n, \Omega)$ является линейной комбинацией произведений инвариантов трех типов:*

- (i) контравариантных скобок $[x \dots x]$ веса 1,
- (ii) ковариантных скобок $[y'_1 \dots y'_n]$ веса -1 ,
- (iii) скалярных произведений $\langle x, y' \rangle$ веса 0.

В частности, полилинейные инварианты существуют только в том случае, когда $p - q$ кратно n .

§ 8. Теорема Грама

Мы приближаемся теперь к самому сердцу классической теории инвариантов. Постараемся понять, почему инварианты имели такое значение для математиков девятнадцатого века. Прежде всего заметим, что как только известны все абсолютные инварианты группы $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n, \Omega)$, то мы знаем и все ее конкомитанты. Так, допустим, что $\varphi: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r \rightarrow T_q^p(E)$ — одновременный конкомитант. По φ можно следующим образом построить абсолютный инвариант: если $u \in T_q^p(E)^* = T_p^q(E)$ и если $z_j \in E_j$, то рассмотрим форму $\psi(z_1, z_2, \dots, z_r, u) = \langle \varphi(z_1, \dots, z_r), u \rangle$. Для всех $\sigma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \psi(\sigma \cdot z_1, \dots, \sigma \cdot z_r, \sigma \cdot u) &= \langle \varphi(\sigma \cdot z_1, \dots, \sigma \cdot z_r), \sigma \cdot u \rangle = \\ &= \langle \sigma^{-1} \cdot (\sigma \cdot \varphi(z_1, \dots, z_r)), u \rangle = \\ &= \psi(z_1, \dots, z_r, u), \end{aligned}$$

так что ψ — абсолютный инвариант. Обозначая через $u_1, \dots, u_k$ базис пространства $T_q^p(E)^*$, находим, что $\varphi(z_1, \dots, z_r) = \sum \psi(z_1, \dots, z_r, u_k) u_k$ и, следовательно, ψ однозначно определяет φ .

В определении Клейна геометрия группы $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n, \Omega)$ есть не что иное, как совокупность алгебраических свойств, инвариантных относительно Γ . Такое свойство относится к некоторому количеству смешанных тензоров $u, v, \dots, w$ и выражается в виде конечного числа алгебраических соотношений между их компонентами, т. е. в виде системы соотношений $K_h(u, v, \dots, w) = 0$, где каждый K_h будет полиномом от компонент тензоров $u, v, \dots, w$. Кроме того, соотношения должны иметь инвариантный смысл, т. е. для каждого $\sigma \in \Gamma$ полиномы $K_h(u, v, \dots, w)$ равны нулю тогда и только тогда, когда полиномы $K_h(\sigma \cdot u, \sigma \cdot v, \dots, \sigma \cdot w)$ равны нулю. Мотивом для нахождения инвариантов служит теорема Грама, утверждающая, что система соотношений, имеющих инвариантный смысл, эквивалентна системе $K'_h = 0$, где K'_h — абсолютные инварианты. Прежде чем доказывать теорему Грама, установим следующую лемму.

ЛЕММА. Рассмотрим пространство тензоров $T_q^p(E)$ и базис $e_1, \dots, e_n$ в E . Для произвольного базиса $y = (y_1, \dots, y_n)$ в E обозначим через $\sigma_y \in \text{GL}(n, \Omega)$ такое преобразование, что $\sigma_y(e_j) = y_j$. Для каждого $u \in T_q^p(E)$ вектор $\sigma_y^{-1} \cdot u$ имеет тогда в качестве компонент (по отношению к соответствующему базису в $T_q^p(E)$) абсолютные рациональные инварианты от $u, y_1, \dots, y_n$.

Доказательство. По определению $\sigma_{\tau \cdot y} = \tau \sigma_y$, если $\tau \in \Gamma$. Поэтому $\sigma_{\tau \cdot y}^{-1} = \sigma_y^{-1} \tau^{-1}$, так что $\sigma_{\tau \cdot y}^{-1} \cdot (\tau \cdot u) = \sigma_y^{-1} \cdot u$, откуда следует, что компоненты вектора $\sigma_y^{-1} \cdot u$ — абсолютные инварианты. $\square$

ТЕОРЕМА ГРАМА. Предположим, что соотношения

$$K_h(u_1, \dots, u_r) = 0 \quad (1 \leq h \leq s, u_i \in T_{q_i}^{p_i}(E))$$

имеют инвариантный смысл для группы $\text{GL}(n, \Omega)$. Тогда они эквивалентны системе соотношений $K'_h(u_1, \dots, u_r, y_1, \dots, y_n) = 0$, в которой K'_h суть абсолютные инварианты.

Доказательство. По условию $K_h(u_1, \dots, u_r) = 0$ в том и только том случае, когда для всех $\sigma \in \text{GL}(n, \Omega)$

$$K_h(\sigma \cdot u_1, \dots, \sigma \cdot u_r) = 0,$$

так что для всех $y = (y_1, \dots, y_n)$ равенства $K_h(u_1, \dots, u_r) = 0$ влекут за собой соотношения $K_h(\sigma_y^{-1} \cdot u_1, \dots, \sigma_y^{-1} \cdot u_r) = 0$, имеющие вид

$$K'_h(u_1, \dots, u_r, y_1, \dots, y_n) = 0.$$

Но K'_h — полиномы от компонент абсолютных инвариантов векторов $y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r$.

Обратно, если эти соотношения выполняются для всевозможных наборов y_j , то, взяв $y_j = e_j$ для всех j , получаем снова $K_h(u_1, \dots, u_r) = 0$.

§ 9. Инварианты n -арных форм. Символический метод

В главе 1 был установлен изоморфизм между пространством однородных полиномов от n переменных степени r (n -арных форм порядка r) и пространством $\mathcal{P}^r(E)^*$ симметрических полилинейных форм от r векторов из n -мерного векторного пространства E . Если имеется n -арная форма порядка r , $f(x) = \sum \beta_{r_1 \dots r_n} (\xi^1)^{r_1} \dots (\xi^n)^{r_n} (r_1 + \dots + r_n = r)$, зависящая от компонент $\xi^1, \dots, \xi^n$ вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства E , то ей единственным образом сопоставляется полилинейная симметрическая

форма $\varphi(x, \dots, x) = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_r^{\alpha_r}$, зависящая от компонент $\xi_j^1, \dots, \xi_j^n$ вектора x . Суммирование

здесь ведется по всем мульти-индексам $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, где $1 \leq \alpha_j \leq n$ при $1 \leq j \leq r$. Форма φ обладает тем свойством, что $\varphi(x, x, \dots, x) = f(x)$.

Коэффициенты a_α формы φ симметричны. Это значит, что если $\pi \in \mathcal{G}_r$, то $a_{\pi \cdot \alpha} = a_\alpha$. Пусть $\nu(\alpha) = (r_1, \dots, r_n)$ — мульти-индекс, в котором r_j равно числу вхождений числа j в α . Если фиксировать $(r_1, \dots, r_n)$, такой, что $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$, то число индексов α , для которых $\nu(\alpha) = (r_1, \dots, r_n)$, совпадает с $r! / r_1! r_2! \dots r_n!$. Таким образом, коэффициент $\beta_{\nu(\alpha)}$ при мономе $x^{\nu(\alpha)} = (\xi^1)^{r_1} \dots (\xi^n)^{r_n}$ в выражении для f в точности равен $(r! / r_1! r_2! \dots r_n!) a_\alpha$. Ввиду изоморфности пространства $\mathcal{P}^r(E)^*$ с $\mathcal{P}^r(E^*) = \underline{s}(T_r^0(E))$ форма φ однозначным образом связана с некоторым симметрическим ковариантным тензором порядка r . Опишем вкратце этот изоморфизм. Пусть $\varphi \in (E^{\otimes r})^*$ удовлетворяет тождеству $\varphi(x \otimes \dots \otimes x) = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_r^{\alpha_r}$, и пусть $e_1^*, \dots, e_n^*$ — базис пространства E^* , двойственный базису $e_1, \dots, e_n$. Образ формы φ равен $\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} e_{\alpha_1}^* \otimes \dots \otimes e_{\alpha_r}^*$. Иными словами, коэффи-

циенты формы φ задают компоненты ковариантного тензора, который является образом φ . Построенный изоморфизм отображает пространство $\mathcal{P}^r(E)^*$ на $\mathcal{P}^r(E^*)$.

Когда имеется какое-то число общих¹⁾ n -арных форм $f_1, \dots, f_k$ и какое-то число контравариантных векторов, то их инвариантом будет по определению одновременный инвариант этих векторов и k симметрических ковариантных тензоров, соответствующих формам f_i . Общая задача состоит, следовательно, в нахождении этих инвариантов.

Ограничимся для определенности двумя n -арными формами f и g порядков r и s и еще одним вектором $x \in E$. Предположим, что

$$f = \sum (r!/r_1! \dots r_n!) a_{r_1 \dots r_n} (\xi^1)^{r_1} \dots (\xi^n)^{r_n},$$

$$g = \sum (s!/s_1! \dots s_n!) b_{s_1 \dots s_n} (\xi^1)^{s_1} \dots (\xi^n)^{s_n}$$

и $x = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, где $r_1 + \dots + r_n = r$ и $s_1 + \dots + s_n = s$. Нам нужно найти все однородные полиномиальные инварианты от f, g и x , имеющие степень p по $a_{\vec{r}}$ ($\vec{r} = (r_1, \dots, r_n)$), степень q по $b_{\vec{s}}$ ($\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$) и степень m по ξ^i . В силу процесса поляризации это эквивалентно нахождению всех полилинейных инвариантов φ от p ковариантных симметрических тензоров $u_1, \dots, u_p$ порядка r , q ковариантных симметрических тензоров $v_1, \dots, v_q$ порядка s и m контравариантных векторов $x_1, \dots, x_m$.

В конце концов мы приходим к рассмотрению полилинейных инвариантов ψ' от pr ковариантных векторов y'_{ih} ($1 \leq i \leq p, 1 \leq h \leq r$), qs ковариантных векторов z'_{jk} ($1 \leq j \leq q, 1 \leq k \leq s$) и m контравариантных векторов $x_1, \dots, x_m$, которые для каждого i симметричны по y'_{ih} , а для каждого j — по z'_{jk} . Для определения последних применим теорему об инвариантах смешанных тензоров. В частности, между $m, n,$

¹⁾ То есть форм, не удовлетворяющих никаким соотношениям. — Прим. перев.

p, q, r и s должно существовать соотношение; именно $gn = m - pr - qs$ для некоторого целого g , равного по определению весу инварианта ψ' .

Восстановление инварианта ϕ по ψ' проводится следующим образом. Пусть $(\eta_{h1}, \eta_{h2}, \dots, \eta_{hn})$ — компоненты вектора y'_{ih} . Заменим в каждом слагаемом инварианта ψ' моном $(\eta_{1\alpha_1}) (\eta_{2\alpha_2}) \dots (\eta_{r\alpha_r})$ на $a_{i r_1 \dots r_n}$, где $(r_1, \dots, r_n)$ — мульти-индекс $\nu(\alpha)$. Сделаем то же самое для z'_{jk} . Числа $a_{i r_1 \dots r_n}$ суть компоненты симметрического тензора u_i порядка $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$. Чтобы вернуться от u_i к f , нужно просто стереть индекс i в $a_{i r_1 \dots r_n}$.

Процесс восстановления можно немного упростить. Вместо различных векторов y'_{ih} рассмотрим один вектор y'_i и поступим так же с векторами z'_{jk} . Обозначим компоненты вектора y'_i через $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ и заменим в выражении для ψ' каждый моном $(\eta_1)^{r_1} (\eta_2)^{r_2} \dots (\eta_n)^{r_n}$ от этих компонент на $a_{i r_1 \dots r_n}$. Делая то же самое с z'_{jk} , получаем следующее правило.

Правило Аронгольда. Каждый полилинейный инвариант ϕ от p n -арных форм степени r , q n -арных форм степени s и m контравариантных векторов получается поляризацией из полиномиального инварианта ψ от $p + q$ ковариантных векторов y'_i, z'_j ($1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$) и m контравариантных векторов x_i . Инвариант ψ линеен по каждому из векторов x_i и имеет степень r по каждому из векторов y'_i и степень s по каждому из векторов z'_j . Инвариант ϕ получается из ψ заменой всех мономов $(\eta_1)^{r_1} \dots (\eta_n)^{r_n}$ (соответственно $(\xi_1)^{s_1} \dots (\xi_n)^{s_n}$) на компоненты $a_{i r_1 \dots r_n}$ (соответственно $b_{i s_1 \dots s_n}$) соответствующих форм.

Применение этого правила называется *символическим методом*, а ψ называется *символическим выражением* инварианта φ . Укажем, например, что f , если его рассматривать как полином от $a_{r_1} \dots a_{r_n}$ и компонент ξ^i вектора x , является абсолютным инвариантом (ибо $m - pr = 0$), символическое выражение которого имеет вид $\langle x, y' \rangle^r$. Заметим, наконец, что можно обобщить правило Аронгольда, включив в него любое число симметрических ковариантных тензоров и контравариантных векторов.

Пример 1. Найдем однородные инварианты веса $g = -2$ одной n -арной квадратичной формы $f = \sum \alpha_{ij} \xi^i \xi^j$ ($\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$). Поскольку g и степень p инварианта должны быть связаны соотношением $2p = -gn$, нужно взять $p = n$. Будем разыскивать, следовательно, всевозможные полилинейные инварианты φ от n ковариантных симметрических тензоров порядка 2. Как мы уже видели в одном из предыдущих параграфов, функция $\varphi(y'_{11}, y'_{12}, \dots, y'_{n2})$ является линейной комбинацией произведений двух ковариантных скобок. Отсюда следует, что единственной нетривиальной возможностью для $\psi(y'_1, \dots, y'_n)$, где $y'_1, \dots, y'_n$ — векторы из E^* , будет $c[y'_1 \dots y'_n]^2$, $c \in \Omega$. Допустим, что компонентами векторов y'_i являются $(\eta_1, \dots, \eta_n)$. Тогда скобка $[y'_1 \dots y'_n]^2$ равна определителю матрицы, (i, j) -й элемент которой есть $\eta_i \eta_j + \eta_i \eta_j + \dots + \eta_i \eta_j$. Но после двух восстановлений $\eta_i \eta_j$ превращается в α_{ij} , так что единственным инвариантом в нашей ситуации является скалярное кратное дискриминанта $d = \det(\alpha_{ij})$ формы f . Символическим выражением инварианта d служит $(n^n)^{-1} [y'_1 \dots y'_n]$.

Пример 2. Рассмотрим n -арную квадратичную форму f и линейную форму $l \in E^*$ и выясним, каковы однородные инварианты, имеющие степень $n - 1$ по

компонентам формы f и степень два по компонентам l . В этом случае $m=0$, $p=n-1$, $r=2$, $q=2$ и $s=1$, так что $g=-2$. Инвариант, получаемый символическим методом, имеет символическое выражение $[y'_1 \dots y'_{n-1} z']^2$. Равенство $[y'_1 \dots y'_n z']^2 = 0$ имеет инвариантный смысл; именно, оно означает, что гиперплоскость $l=0$ касательна к квадрике $f=0$.

ПРИМЕР 3. Якобиан системы n -арных форм. Если даны n -арные формы $f_1, \dots, f_n$ порядков $r_1, \dots, r_n$ и вектор $x \in E$, то якобиан $J = \det(\partial_j f_i)$ имеет следующее символическое выражение:

$$J = c [y'_1 \dots y'_n] \langle y'_1, x \rangle^{r_1-1} \dots \langle y'_n, x \rangle^{r_n-1}.$$

Замечая, что $\partial_j f_i$ получается восстановлением из $r_i \eta_j^i \langle y'_i, x \rangle^{r_i-1}$, видим, что J получается восстановлением из $(r_1 \dots r_n) \det(\eta_j^i \langle x, y'_i \rangle^{r_i-1})$, причем это выражение сводится к указанному выше.

ПРИМЕР 4. Гессиан $H_f = \det(\partial_i \partial_j f)$ n -арной формы f порядка d в качестве символического выражения имеет

$$c [y'_1 \dots y'_n] [y'_1 \langle x, y'_1 \rangle^{d-2} \dots y'_n \langle x, y'_n \rangle^{d-2}].$$

ПРИМЕР 5. В последнем примере мы построим полную, или фундаментальную, систему инвариантов для двух бинарных квадратичных форм

$$\begin{aligned} f &= \alpha_{11} (\xi^1)^2 + 2\alpha_{12} \xi^1 \xi^2 + \alpha_{22} (\xi^2)^2, \\ g &= \beta_{11} (\xi^1)^2 + 2\beta_{12} \xi^1 \xi^2 + \beta_{22} (\xi^2)^2 \end{aligned}$$

и контравариантного вектора $x = (\xi^1, \xi^2)$. Это значит, что мы хотим найти конечное число полиномиальных инвариантов $d_1, \dots, d_r$ от f, g и x , таких, что любой полиномиальный инвариант от f, g и x будет полиномом из $\Omega[d_1, \dots, d_r]$. Рассмотрим инвариант ϕ и предположим, что ϕ — его символическое выражение. Применяя символический метод, можно считать, что

ψ — моном, сомножители которого находятся среди выражений

$$[y'_i y'_n], [z'_j z'_m], [y'_i z'_j], \langle x, y'_i \rangle, \langle x, z'_j \rangle.$$

В каждое такое произведение любой y'_i входит дважды, любой z'_j — также дважды, а любой x — один раз.

Множители вида $[xx]$ рассматривать бесполезно, ибо они исчезают после восстановления.

Допустим сначала, что ψ содержит множитель $[y'_1 y'_2]$. Тогда он должен содержать множитель одного из следующих типов:

- (i) $[y'_1 y'_2]^2$,
- (ii) $[y'_1 y'_2][y'_1 a'] [y'_2 b']$,
- (iii) $[y'_1 y'_2][y'_1 a'] \langle x, y'_2 \rangle$,
- (iv) $[y'_1 y'_2] \langle x, y'_1 \rangle \langle x, y'_2 \rangle$.

Согласно примеру 1, (i) есть символическое выражение инварианта $d_1 = \alpha_{11}\alpha_{22} - (\alpha_{12})^2$. Поскольку $[y'_1 y'_2] \langle x, y'_1 \rangle \langle x, y'_2 \rangle$ и $[y'_2 y'_1] \langle x, y'_2 \rangle \langle x, y'_1 \rangle$ представляют один и тот же инвариант, восстановление выражения (iv) дает 0. Аналогично, если $a' = b'$, то (ii) также приводит к нулю. Предположим поэтому, что $a' \neq b'$. Из результатов § 6 вытекает, что

$$[y'_1 a'] [y'_2 b'] - [y'_2 a'] [y'_1 b'] + [y'_2 y'_1] [a' b'] = 0,$$

так что

$$\begin{aligned} \psi &= [y'_1 y'_2] [y'_1 a'] [y'_2 b'] \theta = \\ &= [y'_1 y'_2] [y'_1 b'] [y'_2 a'] \theta - [y'_1 y'_2]^2 [a' b'] \theta, \end{aligned}$$

откуда вытекает, что d_1 входит в 2ψ в качестве множителя. Аналогично проходит восстановление (iii), и снова d_1 входит в ψ в качестве сомножителя. Итак, если $[y'_i y'_j]$ входит множителем в ψ , то ψ имеет делитель d_1 .

По той же причине, если $[z'_j z'_k]$ входит в ψ , то $d_2 = \beta_{11}\beta_{22} - (\beta_{12})^2$ делит ϕ . Можно, следовательно, предположить, что ни $[y'_i y'_j]$, ни $[z'_j z'_k]$ не являются сомножителями в ψ . Таким образом, если, например, в ψ содержится множитель $[y'_1 z'_1]$, то в ψ входит и одно из следующих произведений:

- (v) $[y'_1 z'_1]^2$,
- (vi) $[y'_1 z'_1][y'_i z'_i][y'_1 z'_j]$,
- (vii) $[y'_1 z'_1][y'_i z'_i] \langle x, y'_1 \rangle^h$,
- (viii) $[y'_1 z'_1] \langle x, y'_1 \rangle^h \langle x, z'_1 \rangle^k$.

Здесь $[y'_1 z'_1]^2$ — символическое выражение инварианта

$d_{12} = \alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11} - 2\alpha_{12}\beta_{12}$, а $[y'_1 z'_1] \langle x, y'_1 \rangle^h \langle x, z'_1 \rangle^k$ — выражение инварианта $h = (\alpha_{11}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{11})(\xi^1)^2 + (\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{11})\xi^1\xi^2 + (\alpha_{12}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{12})(\xi^2)^2$. Чтобы восстановить (vi), положим

$$\begin{aligned} \psi &= [y'_1 z'_1][y'_i z'_i][y'_1 z'_j] \theta = \\ &= [y'_1 y'_i][z'_j z'_1][y'_1 z'_1] \theta + [y'_1 z'_1]^2 [y'_i z'_j] \theta. \end{aligned}$$

В этом случае ϕ является суммой двух инвариантов, первый из которых содержит в качестве множителя d_1 , а второй d_{12} . Восстановление выражения (vii) дает аналогичный вклад. Значит, проводя индукцию по числу множителей в разложении ψ , можно представить ϕ как сумму инвариантов, делителями которых являются мономы от d_1 , d_2 и d_{12} и h , таких, что удаление этих мономов из всех членов дает инвариант, символическое выражение которого не содержит скобок. Но такой инвариант должен распадаться в произведение сомножителей вида $\langle x, y'_i \rangle^h \langle x, y'_j \rangle^k$ или $\langle x, z'_i \rangle^h \langle x, z'_j \rangle^k$. Последние будут символическими выра-

жениями форм f и g соответственно. Соберем наши результаты в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Каждый полиномиальный инвариант двух бинарных квадратичных форм f, g и контравариантного вектора x является полиномом от инвариантов d_1, d_2, d_{12}, h, f и g .*

§ 10. Инварианты подгрупп группы $GL(n, \Omega)$

Группа $\mathcal{G}_f$ действует на пространстве $T_f^0(E) = E^{*\otimes f}$ способом, аналогичным ее действию на $T_0^f(E)$. Тем самым получается разложение в прямую сумму $T_f^0(E) = \sum_i e_i \cdot T_f^0(E)$, где каждый элемент e_i будет проекцией на пространство неприводимых тензоров и будет иметь вид $c_\alpha t$ для некоторой диаграммы Юнга Σ_α и некоторого $t \in \Omega[\mathcal{G}_f]$. Напомним, что элемент $y'_1 \otimes \dots \otimes y'_f$ пространства $T_0^f(E)^*$ характеризуется условием

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_f, y'_1 \otimes \dots \otimes y'_f \rangle = \langle x_1, y'_1 \rangle \dots \langle x_f, y'_f \rangle.$$

Отсюда следует, что если $\pi \in \mathcal{G}_f$, то $\langle z, \pi \cdot z' \rangle = \langle \pi^{-1} \cdot z, z' \rangle$. Если $z' \in T_f^0(E)$ — относительный инвариант группы $\Gamma \subset GL(n, \Omega)$, то по свойству перестановочности это же верно для $e_i \cdot z'$, $(b_\alpha t) \cdot z'$ и $t \cdot z'$. Написанное выше равенство и определение a_α дают

$$\begin{aligned} \langle x_1 \otimes \dots \otimes x_f, (a_\alpha b_\alpha t) \cdot z' \rangle &= \\ &= \langle a_\alpha \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_f), (b_\alpha t) \cdot z' \rangle. \end{aligned}$$

Такое выражение для $\langle z, z' \rangle$ приводит к разложению Юнга — Дерю вектора z' . Это разложение имеет несколько следствий, важных для получения информации об инвариантах подгрупп из информации об инвариантах группы $GL(n, \Omega)$.

ТЕОРЕМА. *Все инварианты произвольного числа контравариантных векторов $x \in E$ для группы $\Gamma \subset$*

$\subseteq \mathbf{GL}(n, \Omega)$ могут быть найдены, если известны все полиномиальные инварианты от не более чем $n-1$ контравариантных векторов.

Доказательство. Положим в введенных выше обозначениях $u' = (b_\alpha t) \cdot z'$, где z' — линейный инвариант группы Γ на $T_f^0(E)$, и вычислим $\langle a_\alpha \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_f), u' \rangle$. Предполагая, что k -й столбец системы α имеет β_k клеток, рассмотрим вместо $x_1 \otimes \dots \otimes x_f$ тензор $w = z_1 \otimes \dots \otimes z_p$, в котором $z_i = y_1 \otimes \dots \otimes y_{\beta_i}$, а $1 \leq i \leq p$, p — число столбцов в α . Этим определен одновременный полиномиальный инвариант $v(y_1, \dots, \dots, y_{\beta_1}) = \langle w, u' \rangle$ от β_1 контравариантных векторов, который в свою очередь однозначно определяет

$$\langle a_\alpha \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_f), u' \rangle.$$

Действительно, так как $a_\alpha = (\sum p_1) \dots (\sum p_{\beta_1})$, где p_i пробегают всевозможные перестановки i -й строки диаграммы Σ_α , отвечающей a_α , то

$$\langle a_\alpha \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_f), u' \rangle$$

будет как раз полилинейным инвариантом (от $x_1, \dots, \dots, x_f$), получаемым поляризацией инварианта v сначала по y_1 , затем по y_2 и т. д. Следовательно, рассматриваемое выражение однозначно определяется через v .

Если $\beta_1 > n$, то $u' = 0$, так что можно считать, что $\beta_1 = n$. Предположим также, что $t \cdot z' = x'_1 \otimes \dots \otimes x'_f$. Тогда $u' = b_\alpha \cdot (t \cdot z') = \underline{a}(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n) \otimes w'$ с $w' \in T_{f-n}^0(E)$. Окончательно

$$\begin{aligned} \langle w, u' \rangle &= \langle y_1 \otimes \dots \otimes y_n, \underline{a}(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n) \rangle \langle z_2 \otimes \dots \otimes z_p, w' \rangle = \\ &= c[y_1 \dots y_n] \langle z_2 \otimes \dots \otimes z_p, w' \rangle. \end{aligned}$$

Это равенство можно усмотреть непосредственно или вывести из первой основной теоремы, поскольку $\langle y_1 \otimes \dots \otimes y_n, \underline{a}(x'_1 \otimes \dots \otimes x'_n) \rangle$ является полилинейным инвариантом группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$. Так как $[y_1 \dots y_n]$ —

инвариант, скалярное произведение $\langle z_2 \otimes \dots \otimes z_p, w' \rangle$ должно быть инвариантно по $y_1, \dots, y_{\beta_2}$ относительно группы Γ . Последовательное применение этого рассуждения позволяет ограничиться случаем $\beta_1 < n$, что и доказывает теорему. $\square$

Из ее доказательства можно получить другое доказательство первой основной теоремы для группы $GL(n, \Omega)$. Дело в том, что каждый инвариант I от не более чем $n-1$ векторов является константой. Действительно, если $e_1, \dots, e_{n-j}$ ($j \geq 1$) — фиксированные независимые векторы в E и $x_1, \dots, x_{n-j}$ также линейно независимы, то существует такой элемент $\sigma \in SL(n, \Omega)$ (т. е. $\det \sigma = 1$), что $\sigma(x_i) = e_i$. Итак, если $x_1, \dots, x_{n-j}$ независимы, то $I(x_1, \dots, x_{n-j}) = I(e_1, \dots, e_{n-j})$. Но поскольку I — полином, в силу принципа устранимости он является константой.

В качестве второго применения рассмотрим расширенную группу

$$\Gamma_v \subset GL(n+v, \Omega),$$

элементами которой будут матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

с $A \in \Gamma \subset GL(n, \Omega)$, $C \in SL(v, \Omega)$ и произвольным B . Если, например, $\Gamma = GL(n, \Omega)$, то Γ_v называется аффинной группой. Если Γ — ортогональная группа (см. следующий пример), то Γ_v называется группой изометрий пространства E .

ТЕОРЕМА. Чтобы получить инварианты произвольного числа контравариантных векторов из Ω^{n+v} относительно группы Γ_v , необходимо добавить к инвариантам группы Γ скобку $[x_1 \dots x_{n+v}]$.

Доказательство. По предыдущей теореме достаточно показать, что каждый полиномиальный инвариант $I(x_1, \dots, x_{n+v-j})$ группы Γ_v с $j \geq 1$ зависит

только от координат x_i с индексами $\leq n$ и, следовательно, однозначно определяется инвариантом группы Γ . Пусть $\mu = n + v$ и $x_i = (\xi_{1i}, \dots, \xi_{\mu i})$ для $1 \leq i \leq \mu - j$. Допустим, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1, \mu-j} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{\mu-j, 1} & \dots & \xi_{\mu-j, \mu-j} \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Можно тогда найти такое $\sigma \in \Gamma_v \cap \cap \mathbf{SL}(n + v, \Omega)$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \\ b_1 & \dots & b_{\mu-j} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что у всех векторов $y_i = \sigma \cdot x_i$ ($1 \leq i \leq \mu - j$) μ -е компоненты равны 0. Иными словами, из того, что Δ не обращается в 0, следует, что $b_1, \dots, b_{\mu-j}$ можно выбрать так, чтобы для последней компоненты $\eta_{\mu i}$ вектора $y_i = (\eta_{1i}, \dots, \eta_{\mu i})$ выполнялось соотношение $\eta_{\mu i} = b_1 \xi_{1i} + \dots + b_{\mu-j} \xi_{\mu-j, i} + \xi_{\mu i} = 0$. В силу инвариантности $I(y_1, \dots, y_{\mu-j}) = I(x_1, \dots, x_{\mu-j})$, так что мы получаем в предположении, что $\Delta \neq 0$, полиномиальное равенство $P(\xi_{hi}) = P(\eta_{hi})$, в котором $P(\xi_{hi}) = I(x_1, \dots, x_{\mu-j})$. Но из принципа устранимости вытекает, что это предположение излишне, и можно заключить, что $P(\xi_{hi})$ никогда не зависит от $\xi_{\mu i}$, т. е. для любых $x_1, \dots, x_{n+v-j}$ из E инвариант $I(x_1, \dots, x_{n+v-j})$ зависит только от координат векторов x_i с индексами $\leq n + v - 1$.

В общем случае нетрудно провести аналогичное рассуждение для $(n + k)$ -й строки, чтобы показать, что для любого i полином $P(\xi_{hi})$ не зависит от $\xi_{n+k, i}$.

Нужно рассмотреть матрицу $\sigma \in \Gamma_v$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ b_1 & \dots & b_{n+k-1} & & 1 & b_{n+k+1} & \dots & b_{\mu-j} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

и применить к ней те же самые соображения.

Пример. Предположим, что Ω — поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ и пространство $E = \mathbf{C}^n$ снабжено билинейной формой $(x|y) = \sum_i \xi_i \eta_i$, $x, y \in E$. Пусть $\mathbf{O}(n)$ — подгруппа в $\mathbf{GL}(n)$, оставляющая эту форму на месте, т. е. $\sigma \in \mathbf{O}(n)$ в том и только том случае, когда $(\sigma(x)|\sigma(y)) = (x|y)$. Поскольку для каждого $\sigma \in \mathbf{O}(n)$ выполняется соотношение ${}^t\sigma\sigma = I$, имеем $\det \sigma = \pm 1$. Пусть $\mathbf{O}^+(n)$ — подгруппа $\mathbf{O}(n) \cap \mathbf{SL}(n)$.

ТЕОРЕМА. Каждый полиномиальный инвариант n векторов для группы $\mathbf{O}(n)$ является полиномом от $[x_1 \dots x_n]$ и скалярных произведений $(x_j|x_k)$. Если инвариант имеет четный вес, то можно опустить скобку, поскольку $[x_1 \dots x_n]^2 = \det(x_j|x_k)$.

Доказательство. Используем индукцию по n , так как результат тривиален при $n = 1$. Из разложения Юнга — Дерю следует, что полиномиальный инвариант от $x_1, \dots, x_n$ является комбинацией произведений степеней $[x_1 \dots x_n]$ и инвариантов от $n - 1$ векторов $x_1, \dots, x_{n-1}$. Все сводится, таким образом, к доказательству того, что произвольный полиномиальный инвариант f от $x_1, \dots, x_{n-1}$ для группы $\mathbf{O}(n)$ будет полиномом от скалярных произведений $(x_i|x_k)$. Всегда найдется элемент $\sigma \in \mathbf{O}(n)$, преобразующий

$x_1, \dots, x_{n-1}$ в векторы $x'_1 = \sigma(x_1), \dots, x'_{n-1} = \sigma(x_{n-1})$, принадлежащие гиперплоскости H , порожденной первыми $n-1$ векторами естественного базиса в $E = \mathbb{C}^n$. Поэтому имеет место равенство $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x'_1, \dots, x'_{n-1})$. Если f — инвариант нечетного веса, то $f = 0$, ибо симметрия $\tau \in \mathbf{O}(n)$ относительно H оставляет все векторы из H на месте и имеет определителем -1 , так что $f(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = -f(x'_1, \dots, x'_{n-1})$. С другой стороны, каждое преобразование $\sigma' \in \mathbf{O}(n-1)$ можно продолжить до преобразования из $\mathbf{O}(n)$, не меняющего n -й базисный вектор, и потому $f(x'_1, \dots, x'_{n-1}) = f(\sigma'(x'_1), \dots, \sigma'(x'_{n-1}))$. По предположению индукции заключаем, что если f — инвариант четного веса, то $f(x'_1, \dots, x'_{n-1})$ — полином от $(x'_j | x'_k) = (x_j | x_k)$, чем завершается доказательство.

§ 1. Теорема конечности

Вычисления инвариантов, проведенные для простых систем форм и векторов, привели к гипотезе, что в любом случае все инварианты являются полиномами от *конечного* их числа. Но это было доказано (Горданом в 1868 г.) лишь для бинарных форм. Поэтому, когда Гильберт (в 1890 г.) доказал общую гипотезу, это произвело сенсацию, тем большую, что Гильберт основывался не на каких-либо вычислительных методах, но на общих соображениях конечности (знаменитая „Basissatz“, которую он доказал в той же статье) и на процессе сопоставления произвольной форме некоторой инвариантной (Ω -процесс Кэли). Мы дадим принадлежащее Нагате доказательство теоремы конечности в более широкой ситуации, чем у Гильберта. Оно относится, в частности, к инвариантам всех полупростых групп над полями характеристики нуль, равно как и конечных групп. В 1900 г. Гильберт сформулировал в качестве своей четырнадцатой проблемы задачу обобщения его теоремы на произвольную подгруппу $\Gamma \subset GL(n)$. Эта проблема оставалась нерешенной до 1958 г., когда Нагата построил контрпример.

Пусть $R = K[a_1, \dots, a_n]$ — конечно порожденная алгебра над произвольным полем K . Мы не предполагаем, что a_i алгебраически независимы над K . Через Γ будем всегда обозначать группу автоморфизмов алгебры R , удовлетворяющую следующему условию:

(i) орбита¹⁾ любого элемента $f \in R$ относительно группы Γ содержится в конечномерном (над K) подпространстве из R .

¹⁾ То есть множество элементов кольца R вида $s \cdot f$, $s \in \Gamma$. — Прим. перев.

Можно, следовательно, предположить, что $\Gamma \subset \text{GL}(r, K)$ для некоторого r , ибо, если $V = \sum_i \left(\sum_{s \in \Gamma} K(s \cdot a_i) \right)$, то в силу (i) V — всегда конечномерное векторное пространство, инвариантное относительно Γ . Ограничение $s \rightarrow s|_V$ группы Γ на V вкладывает Γ в $\text{GL}(V)$. Для базиса $b_1, \dots, b_r$ пространства V непременно выполняется равенство $K[b_1, \dots, b_r] = R$, так что всегда можно считать, что базис в V образуют a_i .

Фундаментальное допущение Нагаты состоит в следующем:

(ii) Если $s \rightarrow U(s)$ — любое конечномерное линейное представление группы Γ , имеющее вид

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_2(s) & & & \\ \vdots & & V(s) & \\ \vdots & & & \\ c_r(s) & & & \end{pmatrix},$$

то оно эквивалентно представлению

$$U_1(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & V_1(s) & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, если U допускает инвариантную гиперплоскость, то существует эквивалентное представление, переводящее в себя эту гиперплоскость и оставляющее на месте точки некоторой прямой, дополнительной к этой гиперплоскости. Это всегда так, когда представление U вполне приводимо.

Пусть $I_\Gamma \subset R$ — подалгебра инвариантов относительно Γ .

Теорема Гильберта — Нагаты состоит в следующем.

ТЕОРЕМА. *Кольцо инвариантов I_Γ относительно группы Γ автоморфизмов конечно порожденной K -ал-*

гебры R , удовлетворяющей условиям (i) и (ii), конечно порождено над K .

Доказательство одновременно приводит к варианту теоремы для групп, изучавшихся в главе 2.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n, K)$ — группа автоморфизмов алгебры $K[a_1, \dots, a_m]$, удовлетворяющая (i), если Γ действует на $\sum_i K a_i$ рационально и если каждое конечномерное рациональное представление группы Γ вполне приводимо (или если Γ удовлетворяет условию (ii) для рациональных представлений), то алгебра I_Γ конечно порождена над K .

В ситуации, исследовавшейся Гильбертом, K — поле комплексных чисел, группа $\Gamma = \mathbf{SL}(n, K)$ действует на своих тензорных представлениях, а R есть K -алгебра, порожденная компонентами конечного числа смешанных тензоров $u_1, \dots, u_h$ над K^n . Таким образом, мы рассматриваем R как кольцо полиномов на пространстве E , натянутом на $u_1, \dots, u_h$. Если $P \in R$ и $\sigma \in \mathbf{SL}(n, K)$, то $(\sigma \cdot P)$ (компоненты тензоров u_j) = P (компоненты тензоров $\sigma^{-1} \cdot u_j$), ибо единственным рациональным характером группы $\mathbf{SL}(n, K)$ является константа, и I_Γ будет, следовательно, кольцом полиномиальных (абсолютных) инвариантов действия группы Γ на E .

Примерами групп, удовлетворяющих (ii), служат

(1) в силу теоремы Машке любые конечные группы, порядок которых не делится на характеристику поля K ,

(2) для рациональных представлений группы $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ и $\mathbf{SL}(n, \Omega)$,

(3) для рациональных представлений любая полупростая алгебраическая группа $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n, k)$ (k — поле характеристики 0),

(4) в силу результата Вайтценбёка любой одномерный комплексный тор.

Доказательство теоремы конечности основывается на фундаментальной лемме Нагаты, которая будет сейчас доказана. Как всегда, предполагается, что

Γ — линейная группа, удовлетворяющая условиям (i) и (ii).

ЛЕММА 1. Если $f \in R$, то существует такой элемент $f^* \in I_\Gamma \cap \sum_{s \in \Gamma} Ks \cdot f$, что $f - f^* \in \sum_{s, t \in \Gamma} K(s \cdot f - t \cdot f)$.

Доказательство. Пусть $M_f = \sum_{s \in \Gamma} Ks \cdot f$ и $N_f = \sum_{s, t \in \Gamma} K(s \cdot f - t \cdot f)$. И M_f , и N_f являются конечномерными Γ -инвариантными подпространствами в V . Будем доказывать лемму индукцией по $m = \dim_K M_f$. Когда $m = 0$, лемма тривиальна и можно взять $f^* = 0$. Допустим теперь, что лемма справедлива для всех $m < k$, и возьмем какое-нибудь $f \in R$, для которого $\dim_K M_f = k$. Если $f \in N_f$, то можно положить $f^* = 0$. В противном случае, т. е. когда $f \notin N_f$, элемент $s \cdot f$ однозначно разлагается в сумму $f + (s \cdot f - f)$, т. е. $M_f = N_f \oplus Kf$. Таким образом, N_f инвариантно относительно Γ и имеет коразмерность один, так что в силу (ii) в M_f существуют Γ -инвариантное подпространство P и элемент $f' \in I_\Gamma$, такие, что $M_f = Kf' \oplus P$. Если теперь $f' \notin N_f$, то $M_f = Kf' \oplus N_f$, и поэтому $f = \lambda f' + g$ для некоторого $g \in N_f$. В таком случае можно принять $f^* = \lambda f'$. Когда $f' \in N_f$, имеется разложение $f = \lambda f' + h$ с $h \in P$. Но $M_h \subset P$ в силу инвариантности P , откуда вытекает, что $\dim_K M_h < k$. По предположению индукции найдется такой элемент $h^* \in I_\Gamma \cap M_h$, что $h - h^* \in N_h$. Но из инвариантности f' следует, что $s \cdot h - t \cdot h = s \cdot f - t \cdot f$ и, значит, $N_h = N_f$. Для завершения доказательства достаточно выбрать $f^* = h^*$. Это дает $f - f^* = \lambda f' + (h - h^*) \in N_f$ и

$$f^* \in I_\Gamma \cap M_h \subset I_\Gamma \cap M_f,$$

что и требуется.

ЛЕММА 2. Пусть $f_1, \dots, f_r \in I_\Gamma$. Тогда $I_\Gamma \cap \sum_{i=1}^r Rf_i = \sum_{i=1}^r I_\Gamma f_i$.

Доказательство. Включение $I_\Gamma \cap \sum_{i=1}^r Rf_i \supset \supset \sum_{i=1}^r I_\Gamma f_i$ получается немедленно. Используем индукцию по r (случай $r=0$ тривиален), чтобы установить противоположное включение. Итак, допустим, что лемма выполняется при $r < k$, и пусть

$$f \in I_\Gamma \cap \sum_{i=1}^k Rf_i,$$

где $f_1, \dots, f_k \in I_\Gamma$. Запишем $f = \sum_{i=1}^k h_i f_i$, $h_i \in R$ и выберем на основании фундаментальной леммы такой элемент $h' \in N_{h_k}$, что $h' + h_k \in I_\Gamma$. Так как $f \in I_\Gamma$, то $\sum_{i=1}^k (s \cdot h_i - t \cdot h_i) f_i = s \cdot f - t \cdot f = 0$ для всех $s, t \in \Gamma$,

и поэтому $(s \cdot h_k - t \cdot h_k) f_k = - \sum_{i=1}^{k-1} (s \cdot h_i - t \cdot h_i) f_i$. Отсюда вытекает в силу определения N_{h_k} , что $h' f_k = \sum_{i=1}^{k-1} h'_i f_i$, где все h'_i лежат в R , и что, следовательно,

$f - (h_k + h') f_k = \sum_{i=1}^{k-1} (h_i - h'_i) f_i$. Таким образом,

$$f - (h_k + h') f_k \in I_\Gamma \cap \sum_{i=1}^{k-1} Rf_i$$

и можно воспользоваться предположением индукции, чтобы для каждого $i=1, \dots, k-1$ построить такой элемент $h''_i \in I_\Gamma$, что $f - (h_k + h') f_k = \sum_{i=1}^{k-1} h''_i f_i$. Этим завершается доказательство.

Теперь будет удобно разбить доказательство теоремы на два шага. Сначала мы рассмотрим случай, когда кольцо R градуировано и группа Γ состоит из градуированных автоморфизмов, а затем сведем

к этому общий случай. Отметим, что при таких предположениях условие (i) выполняется автоматически¹⁾.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. K -алгебра R называется *градуированной*, если $R = \sum_{i \geq 0} R_i$ (сумма прямая), где:

- (i) R_0 есть K -алгебра,
- (ii) каждое подпространство R_k является R_0 -модулем,
- (iii) $R_i R_j \subset R_{i+j}$.

Алгебра называется *связной*, если $R_0 = K$. Про элементы из R_i говорят, что они *однородны степени i* . Автоморфизм σ алгебры R называется *градуированным*, если $\sigma(R_k) = R_k$ для всех k .

ЛЕММА 3. Пусть $R = \sum_{i \geq 0} R_i$ — градуированная K -алгебра с $R_0 = K$. Если идеал $R_+ = \sum_{i \geq 1} R_i$ конечно порожден как R -модуль, то алгебра R конечно порождена как алгебра над K .

Доказательство. Запишем $R_+ = \sum_i R a_i$ и без потери общности предположим, что a_i — однородные элементы, степень которых не меньше единицы. Докажем по индукции, что $R = R_0[a_1, \dots, a_n]$. Предположим, что любой однородный элемент $f \in R$ степени $i \geq 0$ принадлежит $R_0[a_1, \dots, a_n]$. Если $f \in R_{i+1}$, то $f = \sum_j g_j a_j$ и можно считать, что каждый элемент g_j однороден степени $\deg f - \deg a_j \leq i$. Но поскольку $g_j \in R_0[a_1, \dots, a_n]$ для всех $1 \leq j \leq n$, это же верно и для f . Так как $R_0 \subset R_0[a_1, \dots, a_n]$, доказательство окончено. $\square$

Предположим теперь, что R — полиномиальное кольцо $K[T_1, \dots, T_m]$ с алгебраически независимыми элементами $T_1, \dots, T_m$ и группа Γ состоит из гра-

¹⁾ Для этого нужно, конечно, предположить, что однородные составляющие этой градуировки конечномерны над K . — Прим. перев.

дуированных автоморфизмов. Тогда I_Γ градуировано. Действительно, если $f = f_1 + \dots + f_k \in I_\Gamma$ и каждое $f_i \in R_i$, то условия $s \cdot f = f$ и $s \cdot f_i \in R_i$ для всех $s \in \Gamma$ приводят к тому, что каждый элемент f_i инвариантен. Пусть I_+ — идеал в I_Γ , состоящий из всевозможных элементов положительной степени. Множество RI_+ будет идеалом в R , и по теореме Гильберта о базисе в I_+ существуют такие элементы $f_1, \dots, f_r$, что $RI_+ = \sum_i Rf_i$. Применяя лемму 2, получаем $RI_+ \cap I_\Gamma = \sum_i I_\Gamma f_i$ и отсюда $I_+ = \sum_i I_\Gamma f_i$. Можно

заключить, что идеал I_+ конечно порожден над I_Γ , и, следовательно, алгебра I_Γ конечно порождена над K . Этим заканчивается доказательство в градуированном случае.

В общей ситуации пусть $R = K[a_1, \dots, a_n]$, где $a_1, \dots, a_n$ линейно независимы, и пусть $R' = K[T_1, \dots, T_n]$ — кольцо полиномов от алгебраически независимых переменных $T_1, \dots, T_n$. Поднимем действие группы Γ с кольца R на кольцо R' по следующей формуле: если для $s \in \Gamma$ имеется равенство $s \cdot a_i = \sum_j s_{ij} a_j$, то положим $s \cdot T_i = \sum_j s_{ij} T_j$. Благодаря

тому обстоятельству, что R' — свободная алгебра от $T_1, \dots, T_n$, преобразование s продолжается до ее градуированного автоморфизма. Для такого действия группы Γ на градуированном кольце R' выполняется условие (i). Таким образом, кольцо I'_Γ инвариантов группы Γ в кольце R' конечно порождено над K .

Пусть $\varphi: R' \rightarrow R$ — гомоморфизм K -алгебр, определенный тем, что $\varphi(T_i) = a_i$ и $\varphi(\lambda) = \lambda$ для $\lambda \in K$. По построению φ эквивариантен, т. е. $\varphi(s \cdot f) = s \cdot \varphi(f)$. Поэтому $\varphi(I'_\Gamma)$ является конечно порожденным подкольцом в I_Γ . Теорема теперь вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4. $\varphi(I'_\Gamma) = I_\Gamma$.

Доказательство. Пусть $f = \varphi(f') \in I_\Gamma$. Поскольку $f' \in R'$, найдется такой элемент $f^* \in I'_\Gamma$, что

$f' - f^* \in \sum_{s, t \in \Gamma} K(s \cdot f' - t \cdot f')$. Эквивариантность отображения φ и инвариантность f влекут за собой соотношения

$$\begin{aligned} \varphi(f' - f^*) &\in \sum_{s, t \in \Gamma} K(\varphi(s \cdot f') - \varphi(t \cdot f')) = \\ &= \sum_{s, t \in \Gamma} K(s \cdot \varphi(f') - t \cdot \varphi(f')) = \{0\}. \end{aligned}$$

Тем самым $f = \varphi(f^*) \in \varphi(I_\Gamma)$. $\square$

§ 2. Контрпример Нагаты

Четырнадцатую проблему Гильберта, к которой мы приведем контрпример, можно сформулировать так: Пусть K — поле и Γ — подгруппа в $\mathbf{GL}(n, K)$. Переменные $x_1, \dots, x_n$ алгебраически независимы над K и Γ действует как группа (градуированных) автоморфизмов кольца $K[x_1, \dots, x_n]$. Будет ли кольцо инвариантов I_Γ группы Γ в $K[x_1, \dots, x_n]$ конечно порождено над K ? Группа Γ действует (однозначным образом) и как группа автоморфизмов поля частных $K(x_1, \dots, x_n)$ над полем инвариантов L_Γ . Поскольку

$$I_\Gamma = K[x_1, \dots, x_n] \cap L_\Gamma,$$

можно задать более общий вопрос: если L — подполе в $K(x_1, \dots, x_n)$, будет ли кольцо

$$K[x_1, \dots, x_n] \cap L$$

конечно порожденным над K ? Мы покажем, что ответ на этот вопрос для некоторых полей L отрицателен и дадим конструкцию группы Γ , для которой $L_\Gamma = L$.

Пусть $R = K[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r]$ — кольцо полиномов от $2r$ переменных над бесконечным полем K , и пусть $E = K(X_1, \dots, Y_r)$ обозначает его поле частных. Положим $t = Y_1 \dots Y_r$, $u_i = Y_1 \dots \hat{Y}_i \dots Y_r$ и $v_i = u_i \cdot X_i$ и выберем элементы $a_{ji} \in K$ с $j = 1, 2, 3$, которые алгебраически независимы над простым подполем в K . Введем, наконец, для $j = 1, 2, 3$ алгебраически независимые (над K) элементы $w_j = \sum_{i=1}^r a_{ji} v_i$.

Ниже будет дано частичное доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Если $r = n^2 \geq 16$ и $L = K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t)$, то кольцо $I = R \cap L$ не является конечно порожденным над K .

Группа Γ будет реализована как подгруппа в $\mathbf{GL}(2r, K)$ с $I_\Gamma = I$ так, что кольцо I_Γ не будет конечно порожденным. Доказательство теоремы основано на серии лемм. Пусть $H = K[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$.

ЛЕММА 1. $I \subset \{\sum g_n t^{-n}; g_n \in H\}$.

Доказательство. Проверим сначала, что $I \subset B = K[t^{-1}][\omega_1, \omega_2, \omega_3, Y_1, \dots, Y_r]$. Так как $X_i = v_i Y_i t^{-1}$, то

$$\begin{aligned} K[t^{-1}][X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r] &= \\ &= K[t^{-1}][v_1, \dots, v_r, Y_1, \dots, Y_r]. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} K[t^{-1}][v_1, \dots, v_r, Y_1, \dots, Y_r] &= \\ &= K[t^{-1}][\omega_1, \omega_2, \omega_3, v_4, \dots, v_r, Y_1, \dots, Y_r], \end{aligned}$$

в силу того что элементы a_{ji} независимы над простым полем. Таким образом,

$$\begin{aligned} I \subset K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) \cap \\ \cap K[t^{-1}][\omega_1, \omega_2, \omega_3, Y_1, \dots, Y_r][v_4, \dots, v_r], \end{aligned}$$

т. е. $I \subset (\text{поле частных кольца } B) \cap B[v_4, \dots, v_r]$. Но элементы $v_4, \dots, v_r$ алгебраически независимы над B , так что легко получаем $I \subset B$.

Заметим, далее, что

$$\begin{aligned} K[t^{-1}][\omega_1, \omega_2, \omega_3, Y_1, \dots, Y_r] &= \\ &= K[\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, t^{-1}][Y_2, \dots, Y_r, Y_2^{-1}, \dots, Y_r^{-1}], \end{aligned}$$

поскольку $Y_1 = t Y_2^{-1} \dots Y_r^{-1}$ и $Y_i^{-1} = u_i t^{-1}$. Итак,

$$\begin{aligned} I \subset K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t) \cap \\ \cap K[\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, t^{-1}][Y_2, \dots, Y_r, Y_2^{-1}, \dots, Y_r^{-1}]. \end{aligned}$$

В силу того что $Y_2, \dots, Y_r$ алгебраически независимы над $K[\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, t^{-1}]$, отсюда вытекает так же, как и выше, включение $I \subset K[\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, t^{-1}]$. Тем самым доказательство леммы 1 завершено.

Обозначим для каждого $i = 1, \dots, r$ через V_i дискретное нормирование поля E , определенное следующим образом: запишем $fg^{-1} \in E$ в виде $fg^{-1} = Y_i^n pq^{-1}$, где $p, q \in R$ — полиномы, взаимно простые с Y_i , а n — целое число, и положим $V_i(fg^{-1}) = n$. Множество элементов из E , для которых $V_i \geq 0$, называется *кольцом нормирования* для V_i . Ограничивая V_i на L , получаем нормирование на L (обозначаемое также через V_i), кольцо нормирования которого обозначим через $\mathcal{O}_i$. Идеал $\mathfrak{m}_i = \{f \in \mathcal{O}_i; V_i(f) \geq 1\}$ в $\mathcal{O}_i$ максимален; в самом деле, $\mathcal{O}_i \setminus \mathfrak{m}_i$ целиком состоит из единиц.

Введем новые элементы $z_i = a_{3i}\omega_1 - a_{1i}\omega_3$ и $z'_i = a_{3i}\omega_2 - a_{2i}\omega_3$ кольца $H = K[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$. Поскольку $z_i = \sum_{j \neq i} (a_{3i}a_{1j} - a_{1i}a_{3j})v_j$ (и аналогичное выражение верно для z'_i), находим, что

$$z_i = Y_i p_i(X_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_r)$$

и $z'_i = Y_i p'_i(X_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_r)$, где и p_i , и p'_i отличны от нуля. Итак, $V_i(z_i) = V_i(z'_i) = 1$. Отметим еще, что $V_i(\omega_3) = 0$, потому что $\omega_3 = a_{3i}X_i u_i + Y_i p(X_1, \dots, Y_r)$.

СУБЛЕММА. Элементы $\omega_3, z_i t^{-1}, z'_i t^{-1}$ алгебраически независимы (над K) по модулю идеала $\mathfrak{m}_i$. Иначе говоря, если $Q \in K[\omega_3, z_i t^{-1}, z'_i t^{-1}] \cap \mathfrak{m}_i$, то $Q = 0$.

Доказательство. Если $Q \in K[\omega_3, z_i t^{-1}, z'_i t^{-1}] \cap \mathfrak{m}_i$, то, полагая $Y_i = 0$, приходим к равенству $0 = Q(a_{3i}v_i, z_i t^{-1}, z'_i t^{-1})$. Умножение на достаточно большую степень t дает соотношение

$$P(v_i, z_i, z'_i, t) = t^s Q(a_{3i}v_i, z_i t^{-1}, z'_i t^{-1}) = 0.$$

Но так как v_i, z_i, z'_i и t алгебраически независимы, $P = 0$ и потому $Q = 0$. $\square$

Пусть $\mathcal{P}_i$ — идеал в H , порожденный элементами z_i и z'_i .

ЛЕММА 2. (а) Для каждого целого $m \geq 1$ имеем $\mathcal{P}_i^m = \{f \in H; V_i(f) \geq m\}$. (б) Если $g_n \in H$, то $V_i(\sum g_n t^{-n}) = \inf_n V_i(g_n t^{-n})$.

Доказательство. Для получения п. (а) используем индукцию по m . Докажем сначала, что $\mathcal{P}_i = \mathfrak{m}_i \cap H$. Допустим, что $f \in H$ и $f \notin \mathcal{P}_i$. Поскольку

$$K[z_i, z'_i, w_3] = K[w_1, w_2, w_3],$$

можно написать $f(w_1, w_2, w_3) = P(z_i, z'_i, w_3) + h(w_3)$, где $V_i(P) \geq 1$ и $h(w_3) \neq 0$. В силу сублеммы $V_i(h(w_3)) = 0$ и потому $V_i(f) = 0$, следовательно, $f \notin \mathfrak{m}_i$.

Предполагая теперь, что утверждение (а) справедливо для m , мы видим, что для получения его при $m + 1$ достаточно показать, что $\mathcal{P}_i^m \setminus \mathcal{P}_i^{m+1} \subset \{f \in H; V_i(f) = m\}$. Для $h \in \mathcal{P}_i^m \setminus \mathcal{P}_i^{m+1}$ имеем

$$h = \sum_{j=0}^m h_j z_i^j (z'_i)^{m-j} + Q,$$

где $Q \in \mathcal{P}_i^{m+1}$ (так что $V_i(Q) > m$), $h_j \in K[w_3]$ для всех j и $h_j \neq 0$ для некоторого j . Следовательно,

$$ht^{-m} = \sum_j h_j (z_i t^{-1})^j (z'_i t^{-1})^{m-j} + Qt^{-m}.$$

Имеем $V_i(h) \geq m$ и допустим, что $V_i(ht^{-m}) > 0$. Из $V_i(Qt^{-m}) > 0$ получаем в этом случае неравенство $V_i(\sum_j h_j (z_i t^{-1})^j (z'_i t^{-1})^{m-j}) > 0$. Но сублемма утверждает, что это невозможно, если хотя бы один элемент h_j отличен от 0. Это противоречие, и $V_i(h) = m$.

Чтобы установить п. (б), достаточно показать, что $V_i(\sum_{n \geq 0} h_n t^{-n}) = \inf_n V_i(h_n t^{-n})$ для $h_n \in H$. Пусть $d = \inf_n V_i(h_n t^{-n})$. По определению по крайней мере

для одного n , скажем для n_0 , выполняется равенство $V_i(h_{n_0}) = n_0 + d$ и, следовательно, $n_0 + d \geq 0$. Для всех n имеем $V_i(h_n) \geq n + d$. В силу (а) выводим отсюда, что $h_n \in \mathcal{P}_i^{n+d}$ при условии $n + d > 0$ и что $h_n \notin \mathcal{P}_i^{n+d+1}$, во всяком случае для $n = n_0$. Итак, если $n + d \geq 0$, то можно написать

$$h_n = \sum_{j=0}^{n+d} f_{nj} z_i^j (z'_i)^{n+d-j} + Q_n,$$

где все f_{nj} лежат в $K[\omega_3]$, Q_n — в $\mathcal{P}_i^{n+d+1}$ и $f_{n_0j} \neq 0$ для некоторого j , $1 \leq j \leq n_0$. Если $n + d < 0$, то примем $Q_n = h_n$. Тогда

$$\sum_n h_n t^{-n-d} = \sum_{n \geq -d} \sum_{j=0}^{n+d} f_{nj} (z_i/t)^j (z'_i/t)^{n+d-j} + \sum_n Q_n t^{-n-d}.$$

Поскольку

$$\sum_n Q_n t^{-n-d} = \sum_{n < -d} h_n t^{-n-d} + \sum_{n \geq -d} Q_n t^{-n-d},$$

то $V_i\left(\sum_n Q_n t^{-n-d}\right) > 0$. Но отсюда следует, так же как и в доказательстве п. (а), что $V_i\left(\sum_n h_n t^{-n-d}\right) = 0$. Таким образом, $V_i\left(\sum_n h_n t^{-n}\right) = d$.

ЛЕММА 3. Положим $\mathcal{A}_n = \bigcap_i \mathcal{P}_i^n$ ($n > 0$). Тогда $I = \{\sum g_n t^{-n}; g_n \in \mathcal{A}_n \text{ при } n > 0 \text{ и } g_n \in H \text{ при } n \leq 0\}$.

Доказательство. Мы уже видели, что, если $f \in I$, то $f = \sum g_n t^{-n}$ и каждое g_n принадлежит H . В силу леммы 2 (а) нужно проверить, что $V_i(g_n) \geq n$ при $n > 0$. Но это вытекает из того факта, что $V_i(f) \geq 0$ для $f \in I$ и потому $V_i(g_n t^{-n}) \geq 0$ для всех n (лемма 2 (б)). Обратное следует из того, что I содержится в кольце

$$K[X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r, Y_1^{-1}, \dots, Y_r^{-1}],$$

а в этом кольце множество элементов f с $V_i(f) \geq 0$ для всех i совпадает с R . $\square$

ЛЕММА 4. Пусть γ — кривая на проективной плоскости S поля K , имеющая $r = n^2 \geq 16$ кратных точек порядка не меньше m и находящихся в общем положении. Тогда

- (i) степень кривой γ больше $m\sqrt{r}$,
- (ii) для любого $r' > \sqrt{r}$ существует кривая γ' , удовлетворяющая приведенным выше для γ условиям и такая, что $r' > \deg \gamma' \cdot m^{-1} > \sqrt{r}$.

Доказательство этой леммы здесь не будет приведено. Читатель отсылается за ним к работе [26] или к семинару Бурбаки, том 1958—1959, н° 175¹⁾.

Точки $P_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ плоскости S , $i = 1, \dots, r$ находятся по условию в общем положении. Так как переменные w_1, w_2, w_3 алгебраически независимы над K , можно рассматривать $H = K[w_1, w_2, w_3]$ как однородное координатное кольцо плоскости S . Идеалы $\mathcal{P}_i$ будут тогда простыми идеалами в H , отвечающими точкам P_i .

Теперь мы в состоянии доказать, что кольцо I не является конечно порожденным. Допустим, что $I = K[f_1, \dots, f_m]$. Удобно предположить, и мы вправе это сделать ввиду леммы 3, что $f_j = h_j t^{-j}$ с $h_j \in \mathcal{A}_j$ и что элементы h_j однородны по w_1, w_2, w_3 . Введем $r_j = (\deg h_j) j^{-1}$, $r^* = \inf r_j$ и заметим, что по утверждению (i) леммы 4 и определению идеала $\mathcal{A}_j$ имеем $r^* > \sqrt{r}$. Поскольку для каждого монома

$$f = f_1^{i_1} \dots f_m^{i_m} = h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m} t^{-i_1 - 2i_2 - \dots - mi_m}$$

выполняется неравенство $\deg f \geq r^*(i_1 + 2i_2 + \dots + mi_m)$ и так как $f \in \mathcal{A}_n$ при $n = i_1 + 2i_2 + \dots + mi_m$, то для всех n и всех однородных элементов $a_n \in \mathcal{A}_n$ справедливо неравенство $(\deg a_n) n^{-1} \geq r^*$ (нужно учесть,

¹⁾ См. также статьи Нагаты [25], [33]. — Прим. перев.

что f_i порождают кольцо I). По лемме 4 (ii) найдется такой элемент $a_n \in \mathcal{A}_n$, что $(\deg a_n) n^{-1} < r^*$. Это противоречие, и, следовательно, кольцо I не будет конечно порожденным над K .

Чтобы завершить описание контрпримера, построим группу Γ автоморфизмов кольца R , $\Gamma \subset \mathbf{GL}(2r, K)$, для которой $I_\Gamma = I$. Возьмем в качестве Γ группу всевозможных матриц вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{pmatrix},$$

где матрицы

$$B_i = \begin{pmatrix} c_i & c_i b_i \\ 0 & c_i \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^r b_i a_{ji} = 0$ ($j = 1, 2, 3$) и

$c_1 \dots c_r = 1$. Группа Γ однозначным образом превращается в такую группу градуированных автоморфизмов кольца R , что $\sigma \cdot X_i = c_i(X_i + b_i Y_i)$ и $\sigma \cdot Y_i = c_i Y_i$ для всех $\sigma \in \Gamma$. Это действие единственным образом продолжается на поле частных E кольца R так, что группа Γ становится группой автоморфизмов поля E . Пусть $L_\Gamma \subset E$ — поле инвариантов. Будет показано, что $L_\Gamma = L$, откуда следует, что $I_\Gamma = R \cap L$.

Элементы w_1, w_2, w_3, t все по определению инвариантны; таким образом, $L \subset L_\Gamma$. Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma$ — подгруппа, задаваемая уравнениями $b_i = 0$ при $i \geq 5$ и $c_j = 1$ для всех j . По условию группа Γ_1 бесконечна. Имеем

$$\begin{aligned} E = K(w_1, w_2, w_3, t, X_4, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_{r-1}) &\supset \\ &\supset L_{\Gamma_1} \supset K(w_1, w_2, w_3, t, X_5, \dots, Y_{r-1}). \end{aligned}$$

Из последующей леммы и того обстоятельства, что Γ_1 — бесконечная группа, находим

$$L_{\Gamma_1} = K(w_1, w_2, w_3, t, X_5, \dots, Y_{r-1}).$$

ЛЕММА. Пусть $K(x)$ — простое трансцендентное расширение поля K и K' — промежуточное поле, т. е. $K \subset K' \subset K(x)$. Если H — бесконечная группа автоморфизмов поля $K(x)$, оставляющих на месте все элементы из K' , то $K' = K$.

Доказательство. Допустим, что $K' \neq K$. По теореме Люрота («Современная алгебра» Ван-дер-Вардена, т. I) поле K' является простым трансцендентным расширением поля K , например, $K' = K(y)$, а поле $K(x)$ — конечным алгебраическим расширением над K' . Отсюда следует, что группа Галуа поля $K(x)$ над $K(y)$ должна быть конечной в противоречие с тем фактом, что группа H бесконечна.

Пусть теперь $\Gamma_2 \supset \Gamma_1$ — подгруппа в Γ , определенная условиями $b_i = 0$ при $i \geq 6$ и $c_i = 1$ для всех i . Имеем включения $L_{\Gamma_1} \supset L_{\Gamma_2} \supset K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, X_6, \dots, Y_{r-1})$ и в силу уже использованного нами рассуждения $L_{\Gamma_2} = K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, X_6, \dots, Y_{r-1})$. Продолжая подобным образом, получаем, что для подгруппы Γ' , задаваемой равенствами $c_i = 1$ при всех i , справедливо соотношение $L_{\Gamma'} = K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, Y_1, \dots, Y_{r-1})$. Итак, $L_{\Gamma} \subset K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t, Y_1, \dots, Y_{r-1})$. Но группа Γ действует на $K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t)[Y_1, \dots, Y_{r-1}]$, переводя Y_i в $c_i Y_i$, и инвариантным подполем этого действия будет как раз основное поле $K(\omega_1, \omega_2, \omega_3, t)$. Это доказывает, что $L_{\Gamma} \subset L$.

§ 1. Аффинный случай

Основная задача, обсуждаемая в недавней книге Мамфорда «Геометрическая теория инвариантов»¹⁾ может быть сформулирована, правда весьма приблизительно, следующим образом. Задано алгебраическое многообразие V и алгебраическая группа Γ , действующая алгебраически на V . Рассмотрим множество V/Γ орбит точек из V относительно группы Γ . Возможно ли снабдить это множество «естественной» структурой алгебраического многообразия? Сразу видно, что прежде чем давать ответ на этот вопрос, нужно выработать общие определения слов, участвующих в его формулировке, а это сразу завело бы нас в бездонные воды современной алгебраической геометрии. Не стоит говорить, что мы не отважимся на столь далеко идущее предприятие, а удовольствуемся простым скольжением по поверхности, показав в простейших ситуациях связь этой задачи с теорией инвариантов и объяснив хотя бы приблизительно, как Мамфорд пришел к своим мощным методам, искусно развивая весьма оригинальную идею, введенную впервые Гильбертом в его второй большой статье по теории инвариантов в 1893 г. За дальнейшими сведениями читатель отсылается к прекрасной и трудной книге Мамфорда. Начнем с того, что называется «аффинным случаем». Сам по себе он не очень интересен, но его достоинствами являются отсутствие забот об определениях и возможность сразу установить связь с теорией инвариантов. Рассмотрим алгебраически замкнутое поле K (если кто-нибудь хочет иметь возможность использовать геометрическую интуицию, он может в качестве K взять поле комплексных чисел)

¹⁾ См. стр. 125 настоящего издания. — Прим. перев.

и аффинное алгебраическое многообразие в самом наивном смысле этого понятия. Именно, мы рассматриваем множество V точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ аффинного пространства K^n , удовлетворяющих семейству полиномиальных уравнений $P_\alpha(x) = 0$, где P_α принадлежат кольцу $A = K[X_1, \dots, X_n]$. Группа Γ будет в этой ситуации подгруппой в $\mathbf{GL}(n, K)$, переводящей V в себя.

Фундаментальная конструкция аффинной алгебраической геометрии состоит тогда в сопоставлении множеству V кольца R «регулярных функций» на V , т. е. ограничений на V полиномов из A . Кольцо это, очевидно, изоморфно кольцу $A/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — идеал, состоящий из всех полиномов P , обращающихся в 0 на V (следует иметь в виду, что идеал $\mathfrak{a}$ содержит полиномы P_α , но в общем случае не совпадает с идеалом $\mathfrak{b}$, порожденным ими, а является лишь «корнем» идеала $\mathfrak{b}$, т. е. состоит из всевозможных полиномов, некоторая степень которых содержится в $\mathfrak{b}$). Основопологающий факт состоит в том, что и, обратно, кольцо R полностью определяет множество V (теорема Гильберта о нулях). Точнее, каждой точке $a \in V$ можно поставить в соответствие максимальный идеал $\mathfrak{m}_a$ в R , образованный всеми регулярными функциями f , такими, что $f(a) = 0$ (или, что эквивалентно, гомоморфизм K -алгебр $g \rightarrow g(a)$ из R в K , для которого $\mathfrak{m}_a$ является ядром), и *каждый* K -гомоморфизм из R в K имеет такой вид, иначе говоря, с «функторной» точки зрения $V = \text{Hom}_K(R, K)$ (отметим, что любой K -гомоморфизм $g: R \rightarrow K$ таков, что $g(1) = 1$ и, следовательно, он *сюръективен*, ибо $K \subseteq R$). Итак, сказать, что многообразие V инвариантно относительно Γ — это все равно, что сказать, что группа Γ , действуя естественно на A , переводит *идеал* $\mathfrak{a}$ в себя¹⁾.

Функции на множестве V/Γ со значениями в K находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями, определенными на V и *инвариантными* относительно Γ . Каждое разумное представление множества V/Γ в виде алгебраического многообразия

¹⁾ В этом месте исправлена допущенная в оригинале неточность. — Прим. перев.

должно приводить к тому, что «регулярные» функции на V/Γ становятся при подъеме на V «регулярными» функциями на V . Это означает, что кольцом «регулярных функций» на многообразии V/Γ должно быть кольцо I_Γ (абсолютных) инвариантов кольца R относительно группы Γ . Отсюда немедленно находятся ограничения на группу Γ : именно, кольца «регулярных функций», например кольцо R , всегда конечно порождены над K , и потому кольцо I_Γ должно обладать этим свойством. Из контрпримера Нагаты мы знаем, что это не всегда так. Будем, следовательно, предполагать, что группа Γ удовлетворяет описанным в гл. 3 условиям (i) и (ii) Нагаты, гарантирующим конечную порожденность кольца I_Γ над K . Как мы видели выше, кольцу I_Γ можно поставить в соответствие алгебраическое многообразие $W = \text{Hom}_K(I_\Gamma, K)$. Имеется, кроме того, естественное отображение $\pi: V \rightarrow W$, возникающее из вложения $j: I_\Gamma \rightarrow R$ и являющееся отображением $g \rightarrow g \circ j$ из $\text{Hom}_K(R, K)$ в $\text{Hom}_K(I_\Gamma, K)$. В терминах «точек» (или максимальных идеалов) это отображение переводит максимальный идеал $\mathfrak{m}_a$ в его пересечение $\mathfrak{m}_a \cap I_\Gamma$ с кольцом I_Γ . Выясним, существует ли «естественная» биекция $h: V/\Gamma \rightarrow W$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ p \swarrow & & \searrow \pi \\ V/\Gamma & \xrightarrow{h} & W \end{array}$$

в которой p — проекция. Определение отображения h в достаточной степени очевидно: каждый элемент из I_Γ инвариантен относительно Γ и пересечения идеалов $\mathfrak{m}_a$ и $\mathfrak{m}_{\sigma \cdot a}$, $\sigma \in \Gamma$, с кольцом I_Γ одни и те же для всех σ . Таким образом, π можно пропустить через V/Γ . Осталось убедиться, что h биективно.

Прежде всего заметим, что отображение π (и потому h) всегда сюръективно. Иначе говоря, если задан максимальный идеал $\mathfrak{n}$ из I , то в R существует такой максимальный идеал $\mathfrak{m}$, что $\mathfrak{m} \cap I_\Gamma = \mathfrak{n}$. В самом деле, в силу теоремы Гильберта о базисе идеал $\mathfrak{n}$ порожден

конечным числом инвариантов $f_1, \dots, f_r$, и в силу леммы 2 гл. 3 для идеала $\mathfrak{b} = R\mathfrak{n}$ кольца R , порожденного элементами f_j , имеем $\mathfrak{b} \cap I_\Gamma = \mathfrak{n}$. Взяв максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца R , содержащий $\mathfrak{b}$, получаем, что $\mathfrak{m} \cap I_\Gamma \supset \mathfrak{n}$, а так как $\mathfrak{n}$ максимален и $\mathfrak{m}$ не содержит единицы, то $\mathfrak{m} \cap I_\Gamma = \mathfrak{n}$.

Инъективность h означает, что для всех максимальных идеалов $\mathfrak{n}$ из I все точки $a \in V$, для которых $\mathfrak{m}_a \cap I_\Gamma = \mathfrak{n}$, принадлежат одной и той же орбите. В обозначениях, введенных выше, это эквивалентно тому, что все максимальные идеалы, содержащие $\mathfrak{b} = R\mathfrak{n}$, отвечают точкам одной и той же орбиты; иначе говоря, эта орбита является алгебраическим подмногообразием в V , определенным идеалом $\mathfrak{b}$. Итак, мы нашли второе необходимое условие, состоящее в том, что все орбиты многообразия V относительно группы Γ должны быть алгебраическими подмногообразиями. Это можно выразить иначе, сказав, что они являются замкнутыми множествами в топологии Зарисского многообразия V (в которой замкнутые множества суть в точности алгебраические подмногообразия многообразия V ; когда $K = \mathbb{C}$, эта топология слабее обычной).

Покажем теперь, что этого условия достаточно¹⁾ для инъективности отображения h (Шевалле — Ивахори — Нагата). Нужно показать, что если $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ — идеалы кольца R , отвечающие различным орбитам, то невозможно, чтобы $\mathfrak{b}_1 \cap I_\Gamma = \mathfrak{b}_2 \cap I_\Gamma$. Ясно, что идеалы $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ инвариантны относительно группы Γ .

Результат вытекает тогда из следующей общей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ — два инвариантных идеала в R , отвечающие двум замкнутым по Зарисскому, инвариантным и не имеющим общих точек множествам W_1 и W_2 . Существует тогда такая функция $f \in I_\Gamma$, что $f(x) = 0$ на W_1 и $f(x) = 1$ на W_2 .

Тот факт, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, означает, что не существует максимальных идеалов, содержащих как $\mathfrak{b}_1$, так и $\mathfrak{b}_2$, и потому $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = R$, т. е. существуют та-

¹⁾ См. также § 2 гл. 1 книги Мамфорда. — Прим. перев.

кие $g_1 \in b_1$ и $g_2 \in b_2$, что $g_1 + g_2 = 1$. Следовательно, для всех $s, t \in \Gamma$ имеем $s \cdot g_1 - t \cdot g_1 = -(s \cdot g_2 - t \cdot g_2)$, и потому

$$\sum_{s, t \in \Gamma} K(s \cdot g_1 - t \cdot g_1) \subset b_2 \cap \left(\sum_{s \in \Gamma} Ks \cdot g_1 \right) \subset b_2 \cap b_1.$$

В силу леммы 1 гл. 3 найдется такая функция $f \in I_\Gamma \cap \sum_{s \in \Gamma} Ks \cdot g_1$, что $g_1 - f \in \sum_{s, t \in \Gamma} K(s \cdot g_1 - t \cdot g_1) \subset b_2$.

Таким образом, при $x \in W_1$ и всех $s \in \Gamma$ выполняется равенство $g_1(x) = s \cdot g_1(x) = 0$ и $f(x) = 0$. С другой стороны, если $y \in W_2$, то $g_1(y) - f(y) = 0$. Но $g_1(y) + g_2(y) = 1$ и $g_2(y) = 0$, так что $f(y) = 1$. $\square$

Ниже в параграфе 3 мы познакомимся с примерами, когда орбиты относительно группы Γ не замкнуты по Зарисскому.

§ 2. Проективный случай

Когда мы в общей задаче, рассмотренной в § 1, заменяем аффинные многообразия на проективные, мы приходим к проблемам геометрического характера, которые уже в XIX веке привлекали внимание математиков. Примером является «классификация» плоских проективных кривых данного порядка r в предположении, что все кривые, получающиеся друг из друга проективными преобразованиями, должны быть отнесены в один и тот же класс. Если теперь X — векторное пространство, состоящее из 0 и всевозможных тернарных форм f степени r , то, поскольку две такие формы, отличающиеся на константу, определяют одну и ту же кривую, множество, которое следует рассмотреть, есть проективное пространство $P(X)$, и нас интересуют орбиты в этом пространстве относительно действия группы $\Gamma = \text{PSL}(3, K)$ проективных преобразований плоскости. В случае, когда $r \geq 3$, эти орбиты зависят от «параметров», и чтобы сделать это высказывание точным,

нам опять нужно выяснить, можно ли ввести на множестве $\mathbf{P}(X)/\Gamma$ «разумную» структуру алгебраического многообразия. Как мы увидим, на этот вопрос следует ответить «нет»; некоторые «специальные» кривые порядка r следует удалить, чтобы оставшееся множество орбит можно было превратить в алгебраическое многообразие. Такие элементарные проблемы «классификации» прокладывают путь к гораздо более трудным, таким, как проблема модулей, решенная в книге Мамфорда.

Здесь мы будем заниматься проективными многообразиями, которые являются проективными пространствами $\mathbf{P}(X)$, где X — векторное пространство размерности N над K . Группа Γ будет подгруппой в $\mathbf{SL}(N, K)$ (ее можно рассматривать и как подгруппу в $\mathbf{PSL}(N, K)$, поскольку $\mathbf{P}(X)$ поточечно инвариантно относительно гомотетий и, следовательно, действия будут одинаковыми. Позднее мы введем еще некоторые ограничения на группу Γ . Хотелось бы повторить наш подход в аффинном случае, рассматривая «регулярные» функции на $\mathbf{P}(X)$, инвариантные относительно группы Γ . Неприятность состоит в том, что никаких «регулярных функций», кроме констант, не существует. В самом деле, функция на $\mathbf{P}(X)$ — это функция на $X \setminus \{0\}$, постоянная на каждом луче $\{\xi a; a \neq 0, \xi \in K^*\}$. Но никакой непостоянный полином не обладает этим свойством. Иначе говоря, имеет смысл рассматривать на $\mathbf{P}(X)$ проективные «гиперповерхности», состоящие из образов всех точек $x \in X \setminus \{0\}$, удовлетворяющих уравнению $f(x) = 0$, где f — однородный полином. Эти гиперповерхности не являются множествами точек, в которых обращается в нуль «регулярная функция». Вообще, чтобы построить функции, придется ограничиться лишь функциями, определенными на открытых по Зарисскому плотных подмножествах в $\mathbf{P}(X)$. Например, если f — полином степени m , а $\xi^1, \dots, \xi^N$ — координаты точки $x \in X \setminus \{0\}$, то можно рассмотреть функцию $f(x)/(\xi^j)^m$, которая однородна степени 0 и потому постоянна на каждом луче. Она определена,

следовательно, на открытом подмножестве U_j в $X \setminus \{0\}$, задаваемом условием $\xi^j \neq 0$. Итак, мы имеем N открытых множеств, покрывающих вместе $X \setminus \{0\}$, и на каждом из них — функцию, причем на пересечении $U_j \cap U_k$ две функции отличаются на множитель $(\xi^j/\xi^k)^m$, определенный наряду с обратным к нему в каждой точке.

Если мы хотим найти «многообразие орбит», то первым шагом является покрытие многообразия $X \setminus \{0\}$ открытыми подмножествами V_j , инвариантными относительно гомотетий и относительно группы Γ , т. е. содержащими орбиты всех своих точек. Если V'_j — образ множества V_j в $\mathbf{P}(X)$, то имеет смысл рассмотреть «подмногообразие орбит» V'_j/Γ , и если V'_j — аффинные многообразия (что верно для образов U'_j множеств U_j , введенных выше, так как они изоморфны пространству K^{N-1}), то можно, накладывая на Γ подходящие ограничения, применить к каждому V'_j метод § 1. Чтобы получить, наконец, $\mathbf{P}(X)/\Gamma$, следует «склеить» разумным образом множества V'_j/Γ , что делается без труда при достаточном знании «абстрактной» алгебраической геометрии. Поскольку таких знаний не предполагается, мы целиком опустим весь «процесс склеивания» (он полностью проведен в книге Мамфорда). Естественный способ построения в $X \setminus \{0\}$ открытых подмножеств V , инвариантных относительно гомотетий и группы Γ , состоит в рассмотрении непостоянного *однородного инвариантного* (относительно Γ) *полинома* F и выборе в качестве V множества, на котором $F(x) \neq 0$. Легко видеть, что образ V' в $\mathbf{P}(X)$ такого множества V является *аффинным* многообразием. Если r — степень полинома F , то кольцо «регулярных функций» на V' состоит из рациональных функций P_{mr}/F^m , где m пробегает целые числа ≥ 1 и P_{mr} пробегает для каждого m всевозможные однородные полиномы степени mr (это кольцо изоморфно кольцу ограничений полиномов на X на гиперповерхность $F(x) = 1$).

§ 3. Нуль-формы и полустабильные точки

Здесь мы встречаемся с отмеченной выше трудностью. Чтобы провести нашу программу, нужно целиком покрыть $P(X)$ инвариантными множествами V' , определенными различными однородными инвариантными полиномами F . Но это возможно, если только в X нет точек $x \neq 0$, для которых $F(x) = 0$ для *всех* однородных непостоянных полиномиальных инвариантов F . Простые примеры показывают, однако, что такие векторы, вообще говоря, существуют. Так, если X — пространство квадратичных форм от n переменных над полем K и $\Gamma = \text{SL}(n, K)$, то единственными однородными полиномиальными инвариантами на X являются степени дискриминанта (см. гл. 2, § 9, пример 1). Следовательно, *все* однородные непостоянные полиномиальные инварианты обращаются в нуль на *вырожденных* квадратичных формах (т. е. формах ранга $< n$).

Эти «исключительные» векторы x впервые систематически изучались Гильбертом под названием «нуль-форм» в его работе 1893 года (Гильберт главным образом интересовался пространством X ковариантных симметрических тензоров). Векторы $x \neq 0$, для которых существует хотя бы один такой однородный инвариант F , что $F(x) \neq 0$, называются по Мамфорду «*полустабильными точками*». Их можно охарактеризовать следующей леммой, использующей язык топологии Зарисского на X .

Лемма 2. *Предположим, что группа Γ удовлетворяет условиям (i) и (ii) Нагаты из гл. 3. Для того чтобы точка $x \neq 0$ была полустабильной, необходимо и достаточно, чтобы замыкание (по Зарисскому) в X ее орбиты $O(x)$ не содержало точку 0.*

Действительно, если F — непостоянный однородный инвариантный полином, отличный от нуля в x , то он по определению равен на орбите $O(x)$ константе $\neq 0$ и, разумеется, равен той же константе на замыкании этой орбиты по Зарисскому $\overline{O(x)}$.

Однако $F(0) = 0$, так что 0 не принадлежит $\overline{O(x)}$. Обратно, допустим, что, $0 \notin \overline{O(x)}$ и применим лемму 1 к замкнутым по Зарисскому инвариантным множествам $W_1 = \{0\}$ и $W_2 = \overline{O(x)}$. Существует такой инвариантный полином f , что $f(0) = 0$ и $f(z) = 1$ на W_2 . Можно написать $f = F_0 + F_1 + \dots + F_m$, где F_j — однородные компоненты степени j и, как известно, все F_j инвариантны относительно Γ (гл. 1). Из условия $f(0) = 0$ вытекает, что $F_0 = 0$; остальные полиномы F_j принимают в 0 значение 0 и хотя бы один из них должен быть $\neq 0$ на орбите $\overline{O(x)}$, а потому и в точке x . Это доказывает полустабильность точки x .

§ 4. Критерий Гильберта — Мамфорда

Одна из идей Гильберта дает возможность использовать лемму 2, чтобы получить *явный* критерий, характеризующий «нуль-формы» (или полустабильные точки). Гильберт рассматривал лишь случай, когда $K = \mathbb{C}$ и $\Gamma = \mathrm{SL}(n, K)$, т. е. Γ — группа Ли. Выясняя, когда точка 0 лежит в замыкании (в обычной топологии)¹⁾ орбиты $O(x)$ точки $x \neq 0$ относительно группы Γ , он показал, что для этого необходимо и достаточно, чтобы точка 0 принадлежала замыканию орбиты точки x относительно какой-нибудь *однопараметрической подгруппы* $t \rightarrow \gamma(t)$ группы $\mathrm{SL}(n, K)$. Поскольку $\gamma(t) \cdot x$ принадлежит $X \setminus \{0\}$ при всех конечных значениях $t \in \mathbb{C}$, единственная возможность состоит в том, что $\gamma(t) \cdot x$ *стремится к 0, когда t стремится к бесконечности*. Следует указать, что детальное обоснование этого рассуждения, включающее изучение «ветвей» алгебраических функций от переменной t и способа, которым они переставляются в окрестности «точек ветвления», довольно запутанно и в целом не очень удовлетворительно. Сейчас мы, следуя Мамфорду, покажем,

¹⁾ Замыкания орбиты алгебраической группы в обычной топологии и топологии Зарисского совпадают. — Прим. перев.

как аргументы Гильберта можно сделать совершенно строгими и целиком алгебраическими.

Поле K , как всегда, будет алгебраически замкнутым и характеристики 0. Заметим, что $\Gamma = \mathbf{SL}(n, K)$ — алгебраическая группа, и как аффинное подмногообразие в K^{n^2} ее можно определить главным идеалом кольца полиномов $K[Y_{11}, \dots, Y_{nn}]$ от n^2 переменных, порожденным полиномом $\det(Y_{ij}) - 1$. Хорошо известно, что этот идеал прост и потому кольцо $A = K[Y_{11}, \dots, Y_{nn}] / (\det(Y_{ij}) - 1)$ «регулярных функций» на группе Γ является областью целостности. Если X — пространство размерности N , то кольцо регулярных функций на X будет кольцом полиномов $R = K[X_1, \dots, X_N]$. Пусть теперь $x \in X$ — ненулевой вектор. Рациональному отображению $s \rightarrow s \cdot x$ группы Γ в X отвечает гомоморфизм $\varphi: R \rightarrow A$ алгебр над K : каждому полиному $u \in R$ он сопоставляет «регулярную функцию» $\varphi(u)$ на Γ , принимающую в «общей» точке (y_{ij}) (y_{ij} — образы элементов Y_{ij} из A) значение $u((y_{ij}) \cdot x)$. И обратно, отображение $s \rightarrow s \cdot x$ есть в точности морфизм $\text{Hom}(\varphi, 1_K): \text{Hom}_K(A, K) \rightarrow \text{Hom}_K(R, K)$. Так как A — область целостности, ядро α_x отображения φ является простым идеалом в R . Оно определяет подмногообразие $\overline{O(x)}$ (замыкание по Зарисскому) в X . Кольцом регулярных функций на этом многообразии будет область целостности $R_x = R/\alpha_x$, которую можно отождествить с подалгеброй в A . Предположим теперь, что точка 0 принадлежит многообразию $\overline{O(x)}$. Это значит, что ей соответствует максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца R_x , не являющийся пересечением R_x и максимального идеала из A .

Доказательство Гильберта использует следующую ключевую лемму из коммутативной алгебры.

ЛЕММА 3. Пусть K — поле характеристики 0, B — конечно порожденная K -алгебра, являющаяся областью целостности, E — ее поле частных, поле F — конечно порожденное расширение поля E . Если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца B , то существует

полное дискретно нормированное кольцо $V \supset B$ с полем частных $L \supset F$ и таким максимальным идеалом $\mathfrak{p}$, что $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{m}$.

Допустим сначала, что $F = E$. Поскольку кольцо B нётерово, идеал $\mathfrak{m}$ конечно порожден. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — его образующие; можно считать, что $x_1 \neq 0$. Пусть C — подкольцо кольца E , порожденное над B элементами $x_2/x_1, \dots, x_n/x_1$. Тогда $x_j \in x_1 C$ при $j > 1$ и, следовательно, $\mathfrak{m}C = x_1 C$ — главный идеал в C . Из теоремы Крулля о главных идеалах следует, что простые идеалы $\mathfrak{p}$ кольца C , являющиеся минимальными в множестве идеалов, содержащих $x_1 C$, имеют высоту 1. Это означает, что никакой простой идеал $\neq 0$ не может строго содержаться в $\mathfrak{p}$. С другой стороны, пересечение $\mathfrak{p}C_{\mathfrak{p}} \cap B$ содержит $\mathfrak{m}$ и не содержит единичного элемента и потому равно $\mathfrak{m}$. Пусть теперь S — целое замыкание кольца C в поле E . Классическая теорема Э. Нётер утверждает, что S — конечно порожденный C -модуль и, следовательно, нётерово кольцо. Более того, кольцо частных $S_{\mathfrak{p}}$ является целым замыканием кольца $C_{\mathfrak{p}}$. Из выбора $\mathfrak{p}$ вытекает, что $C_{\mathfrak{p}}$ имеет размерность по Круллю 1 и то же самое верно для кольца $S_{\mathfrak{p}}$ ввиду его конечности над $C_{\mathfrak{p}}$. Если $\mathfrak{r}$ — максимальный идеал в $S_{\mathfrak{p}}$, содержащий $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$, то локальное кольцо $(S_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{r}}$ целозамкнуто, нётерово и размерности 1, являясь тем самым дискретно нормированным кольцом V с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$, таким, что $\mathfrak{p} \cap C_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}C_{\mathfrak{p}}$. Таким образом, $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{m}$.

Если F — конечно порожденное расширение поля E , то заменим V на кольцо V' нормирования поля F , продолжающего нормирование поля E , отвечающее кольцу V . Поскольку F конечно порождено, то, как хорошо известно, кольцо V' все еще будет дискретно нормированным кольцом. Заменяя, наконец, V' на его пополнение, получаем требуемое.

Применим теперь лемму 3 к кольцу $B = R_x$ (E будет полем частных кольца R_x , F — полем частных кольца A и конечно порожденным расширением поля E). Мы получаем тогда полное дискретно нор-

мированное кольцо V , содержащее R_x , максимальный идеал которого пересекает R_x по $\mathfrak{m}$. Кроме того, поле частных кольца V содержит F . Но предположения, сделанные нами относительно идеала $\mathfrak{m}$, означают, что кольцо V не содержит A .

Заметим далее, что полное дискретно нормированное кольцо, которое является алгеброй над полем K характеристики 0, будет непременно *кольцом формальных степенных рядов от одной переменной* $L[[T]]$, где L — поле, содержащее K . Его максимальный идеал состоит из степенных рядов без постоянного члена, а поле частных является полем $L((T))$ степенных рядов от T , содержащих конечное число членов с отрицательными показателями.

Резюмируя предыдущее, можно сказать, что имеется коммутативная диаграмма гомоморфизмов K -алгебр

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta} & L((T)) \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \\ R & \xrightarrow{\psi} & L[[T]] \end{array}$$

в которой вторая вертикальная стрелка есть естественное вложение, и по условию $\theta(A) \not\subset L[[T]]$. В силу наших предположений отображение $s \rightarrow s \cdot x$ группы Γ в X можно записать в виде $Z \rightarrow U(Z) \cdot x$, где элементы $N \times N$ -матрицы $U(Z)$ являются рациональными функциями (с коэффициентами из K) элементов $n \times n$ -матрицы Z . Пусть $W(T)$ — матрица порядка $N \times N$ над полем $L((T))$, элементы которой являются элементами матрицы $U((\theta(y_{ij})))$. Предыдущие определения и конструкции показывают, что выполняются следующие два свойства:

(i) не все элементы матрицы $W(T)$ принадлежат кольцу $L[[T]]$.

(ii) N координат вектора $W(T) \cdot x$ (принадлежащих а priori полю $L((T))$) являются рядами из $L[[T]]$ без постоянного члена.

Используем теперь тот факт, что $L[[T]]$ — кольцо главных идеалов. В силу теории элементарных дели-

телей, примененной к матрице $Y(T) = (\theta(y_{ij}))$ порядка $n \times n$ и с элементами из $L((T))$, существуют две унимодулярные $n \times n$ -матрицы P и Q над кольцом $L[[T]]$, такие, что обратные к ним состоят из элементов кольца $L[[T]]$ и $Y(T) = PDQ$, где $D = D(T)$ — диагональная матрица

$$D(T) = \begin{pmatrix} T^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T^{\alpha_n} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

α_j — положительные или отрицательные целые числа и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$.

Для гомоморфизма U из $SL(n, K)$ в $SL(N, K)$ имеем $U(Y(T)) = U(P)U(D)U(Q)$. Более того, если T' — вторая переменная, то $D(TT') = D(T)D(T')$ и, значит, $U(D(TT')) = U(D(T))U(D(T'))$. Если m — достаточно большое целое число и $G(T) = T^m U(D(T))$, то матрица $G(T)$ имеет полиномиальные элементы и также удовлетворяет равенству $G(TT') = G(T)G(T')$. Соображения, использованные в доказательстве теоремы § 1 гл. 2, показывают тогда, что существует обратимая $N \times N$ -матрица A с элементами из K , превращающая матрицу $U(D)$ в диагональную матрицу

$$D'(T) = AU(D)A^{-1} = \begin{pmatrix} T^{\beta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{\beta_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & T^{\beta_N} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

в которой β_k — снова положительные или отрицательные целые числа и $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N = 0$. Свойство (i) означает, что не все β_k равны 0.

Можно записать $U(P)A^{-1} = R_0 + TR_1$, $AU(Q) = S_0 + TS_1$, где R_0 и S_0 — обратимые матрицы с элементами из L , а R_1 и S_1 — матрицы с элементами из $L[[T]]$. Имеем

$$D'(T) \cdot (AU(Q) \cdot x) = AU(P)^{-1} \cdot (W(T) \cdot x), \quad (3)$$

и если положить $y = S_0 \cdot x$ (это вектор из пространства $X_{(L)} = X \otimes_K L$), то ясно, что k -я компонента вектора, стоящего в левой части равенства (3), имеет вид $T^{\beta_k}(y_k + Tz_k)$, где $z_k \in L[[T]]$. Так как в силу свойства (ii) все координаты вектора, стоящего в правой части соотношения (3), принадлежат идеалу $TL[[T]]$, то видно, что непременно

$$\beta_k \geq 1 \text{ для всех таких индексов } k, \text{ что } y_k \neq 0. \quad (4)$$

Обратно, если найдется расширение L поля K и такой K -гомоморфизм $\theta: A \rightarrow L((T))$, что для матрицы $W(T)$, определенной так же, как и выше, не все β_k равны 0 и выполняется условие (4), то составное отображение $\theta \circ \varphi$ переводит все переменные X_j в элементы идеала $TL[[T]]$, в то время как $\theta(A) \not\subset L[[T]]$. Таким образом, пересечение кольца R_x с максимальным идеалом из $L[[T]]$ будет максимальным идеалом, соответствующим точке 0, так что 0 принадлежит замыканию орбиты точки x .

Когда K — поле комплексных чисел, формальные степенные ряды можно заменить на сходящиеся (в окрестности точки 0) и $t \rightarrow Y(1/t)$ будет тогда однопараметрической подгруппой Ли группы $SL(n, \mathbb{C})$, которую имел в виду Гильберт.

В общем случае Мамфорд показывает, что в предшествующем рассуждении вместо поля L можно использовать K и, более того, аналогичный критерий для «нуль-форм» справедлив, когда Γ — произвольная редуктивная алгебраическая группа над полем K , а проективное пространство $\mathbf{P}(X)$ заменяется произвольной собственной (над K) алгебраической схемой. Доказательство этого использует результаты Ивахори¹⁾. Кроме того, Мамфорд доказал, что если точка x удовлетворяет не только условию $\beta_k \leq 0$ при $y_k \neq 0$ для всех допустимых «однопараметрических подгрупп», но даже условию $\beta_k < 0$ в той же ситуации, то она будет тем, что он называет «строго стабильной» точкой. Это означает (в обозначениях § 2),

¹⁾ См. § 1 гл. 2 книги Мамфорда. — Прим. перев.

что орбиты группы Γ , принадлежащие аффинному открытому подмногообразию V' в $\mathbf{P}(X)$, замкнуты по Зарисскому и стационарная подгруппа каждой точки из V' имеет размерность 0. Можно, в частности, применить к многообразию V' результаты § 1 и построить, наконец (с помощью «процесса склеивания», о котором мы упоминали), «многообразие орбит», рассматривая действие группы Γ только на открытом подмножестве «строго стабильных» точек.

§ 5. Примеры

Найдем (следуя Гильберту) все «нуль-формы» в простейших из тех случаев, которые были в центре внимания классической теории инвариантов. Многообразие X будет пространством n -арных форм данной степени r (или, что то же самое, симметрических ковариантных тензоров порядка r) с $n=2$ или $n=3$.

А) *Бинарные формы*. Здесь $N=r+1$ и «координатами» бинарной формы

$$x = a_0 \xi_1^r + a_1 \xi_1^{r-1} \xi_2 + \dots + a_r \xi_2^r$$

будут числа $a_0, a_1, \dots, a_r$. Если в предыдущих обозначениях

$$D(T) = \begin{pmatrix} T^{-\alpha} & 0 \\ 0 & T^{\alpha} \end{pmatrix}$$

с $\alpha > 0$, то матрица $U(D(T))$ переводит a_k в $a'_k = a_k T^{(2k-r)\alpha}$ для всех $0 \leq k \leq r$. Условие (4) выполняется поэтому лишь в том случае, когда $a_k = 0$ при $2k - r \leq 0$ и «нуль-формами» будут всевозможные преобразования (под действием группы $\mathbf{SL}(2, K)$) таких форм. Если отождествить (с точностью до множителя) бинарные формы порядка r с системами из r точек (считая их с кратностями) проективной прямой, то нуль-формами будут системы точек, содержащие точку кратности $\geq 1 + (r/2)$ при четных r и кратности $\geq (r+1)/2$ при нечетных r .

В) *Тернарные формы*. Здесь $N = \frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ и тернарная форма

$$x = \sum a_{v_1 v_2 v_3} \xi_1^{v_1} \xi_2^{v_2} \xi_3^{v_3} \quad (\text{с } v_1 + v_2 + v_3 = r)$$

имеет в качестве «координат» коэффициенты $a_{v_1 v_2 v_3}$, где (v_1, v_2, v_3) — системы чисел, для которых $v_1 + v_2 + v_3 = r$. Полагая $D(T) = \text{diag}(T^{\alpha_1}, T^{\alpha_2}, T^{\alpha_3})$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, видим, что $a_{v_1 v_2 v_3}$ умножаются на $T^{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}$ и условие (4) выполняется в том и только том случае, когда $a_{v_1 v_2 v_3} = 0$ для всех таких троек, что

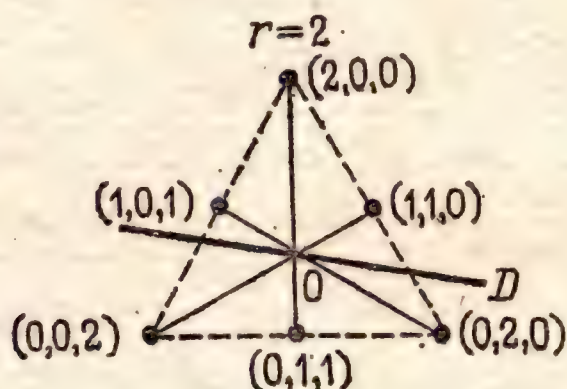
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \leq 0. \quad (5)$$

Гильберт следующим образом интерпретирует это условие графически. Он рассматривает на плоскости равносторонний треугольник ABC , каждая сторона которого имеет длину r , а прямые AB , BC и CA ориентированы соответственно от A к B , от B к C и от C к A . Точке M на плоскости сопоставим набор координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , в котором $\xi_i = \overline{M_i M}$, где M_1 , M_2 и M_3 — точки пересечения прямых, проходящих через M и параллельных CA , AB , BC , с прямыми BC , CA , AB . Тем самым тройке (v_1, v_2, v_3) целых чисел отвечает точка плоскости, для которой эти числа являются ее треугольными координатами. Заметим, что прямые, проходящие через центр O треугольника, имеют уравнение $u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 = 0$, где $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

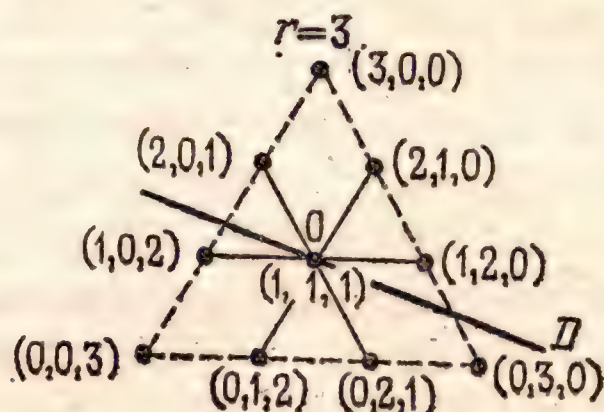
Если такая прямая содержит точку с целочисленными координатами, то все u_j — рациональные числа и можно считать их целыми. Отсюда видно, что для получения нуль-форм нужно рассмотреть произвольную прямую D , проходящую через O , и всевозможные тройки (v_1, v_2, v_3) , отвечающие точкам, лежащим по одну сторону от D (или на D). Затем в форме x следует положить $a_{v_1 v_2 v_3} = 0$ для всех таких троек. Остальные нуль-формы получаются из этих преобразованиями группы $SL(3, K)$, и таким образом можно получить все нуль-формы. Кроме того, следует рассматривать лишь прямые D , не содержащие точек (v_1, v_2, v_3) с целочисленными координатами, подчи-

ненными условию $v_1 + v_2 + v_3 = r$, кроме, конечно, точки 0. Дело в том, что если D_0 — такая прямая, а прямая D достаточно близка к ней, то точки, для которых $v_1 + v_2 + v_3 = r$ и которые лежат по одну сторону от D , совпадают с теми, которые лежат по одну сторону от D_0 . Поэтому, если взять вместо D прямую D_0 , то это приведет к обращению в нуль дополнительных коэффициентов и, следовательно, получаемые таким путем нуль-формы суть *частные случаи* нуль-форм, отвечающих прямой D . Для каждой прямой D следует рассмотреть точки по обе стороны от нее. Кроме того, поскольку вращения на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ оставляют треугольник ABC на месте, они приводят к эквивалентным формам, так что число типов неэквивалентных форм меньше, чем можно ожидать.

Мы проведем гильбертову конструкцию для $r = 2, 3, 4, 5$ и укажем в этих случаях вид кривых, соответствующих нуль-формам.



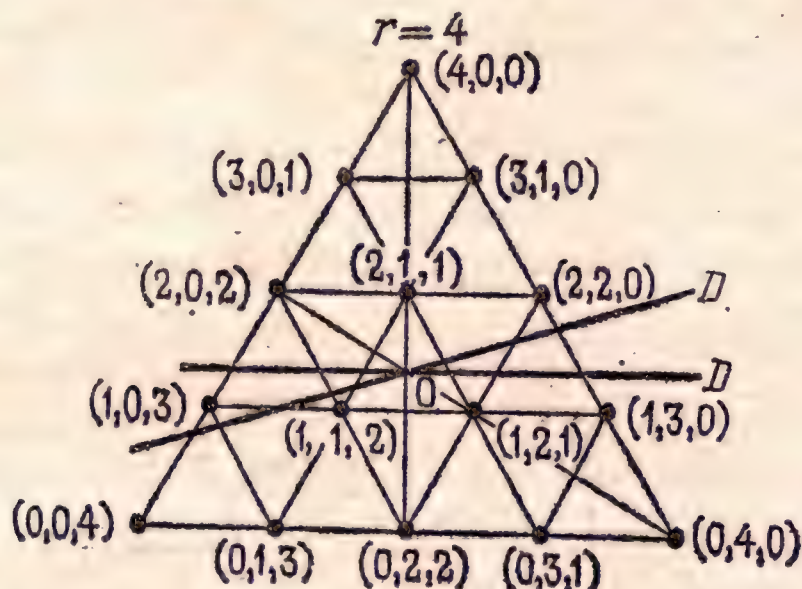
Только один тип: коника¹⁾, распадающаяся на две прямые (см. § 3)



¹⁾ Здесь и далее коника, кубика ... — кривые степеней два, три, ... соответственно. — Прим. перев.

Два типа:

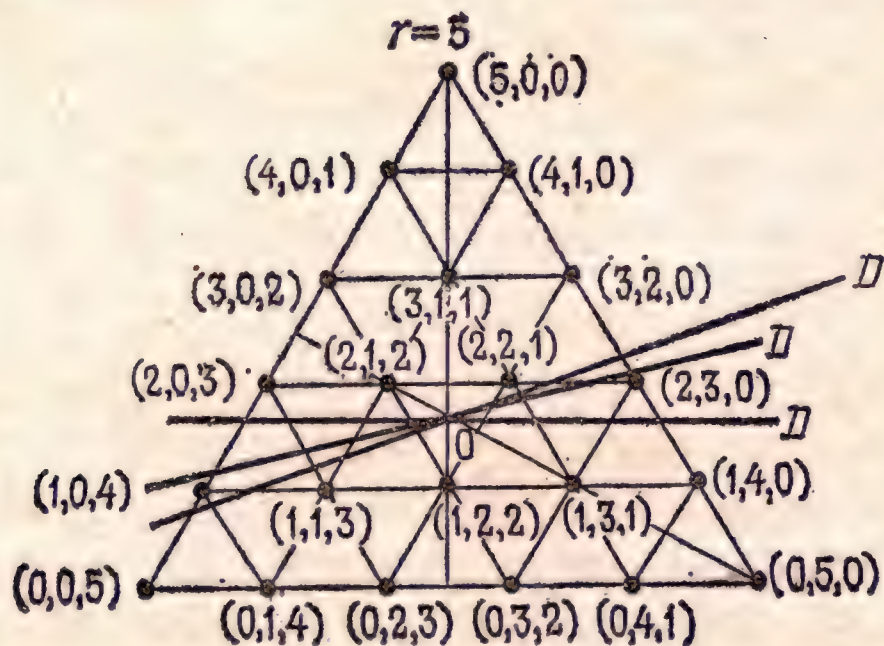
- (1) кубика, распадающаяся на прямую и конику,
- (2) кубика, имеющая точку возврата.



Две прямые D . Три типа:

- (1) кватрика, распадающаяся на двойную прямую и конику,
- (2) кватрика, распадающаяся на кубику и касательную к этой кубике в точке возврата
- (3) кватрика, имеющая тройную точку.

(Первый случай можно считать вырождением второго.)



Три прямые D . Четыре типа:

- (1) квинтика, распадающаяся на двойную прямую и кубику,
- (2) квинтика, имеющая четверную точку,
- (3) квинтика, имеющая тройную точку с единственной касательной,

- (4) квинтика, распадающаяся на кватику с двойной точкой и прямую, касательную к этой кватике в двойной точке.

(Первый случай можно считать вырождением четвертого.)

§ 6. Применения нуль-форм к задаче явного нахождения инвариантов

Гильбертово доказательство теоремы конечности (гл. 3. § 1), равно как и вариант ее доказательства, принадлежащий Нагате и изложенный нами, являются чистыми доказательствами *существования* и не дают никакого способа для нахождения за конечное число шагов (ограниченное а priori вычислимым числом) фундаментальной системы однородных полиномиальных инвариантов, порождающих все кольцо инвариантов (пример такой системы приведен в гл. 2, § 9, пример 5). Гильберт написал свою работу 1893 года частично в ответ на это замечание. Используя понятие нуль-формы и свою «Nullstellensatz» (теорему о нулях, доказанную им в той же статье), он показал, что можно, по крайней мере теоретически, указать метод, который в каждом конкретном случае давал бы в явном виде фундаментальную систему инвариантов. Мы сейчас вкратце опишем этот метод.

Будем считать, что выполнены предположения § 4, и заметим сначала, что для однородного полинома из $R = K[X_1, \dots, X_N]$ быть абсолютным инвариантом относительно группы $SL(n, K)$ — это то же самое, что быть относительным инвариантом для группы $GL(n, K)$. Эта вторая интерпретация удобнее. Нам достаточно показать, что идеал RI_+ кольца R , порожденный непостоянными однородными инвариантами, имеет систему образующих, степени которых *ограничены вычислимым числом* M . Дело в том, что тогда символический метод позволяет за *конечное* число шагов (которое вычисляется через n, N, M и действие группы $SL(n, K)$ на X) построить все эти инварианты.

Гильберт сводит эту задачу к следующей:

(Р) Показать, что существует такое вычислимое число M' , что для любого полустабильного вектора $x_0 \in X$ (т. е. не нуль-формы) найдется такой однородный полиномиальный инвариант P (зависящий от x_0) степени $\leq M'$, что $P(x_0) \neq 0$.

Действительно, допустим, что эта задача решена, и рассмотрим идеал $\mathfrak{J}$ кольца R , порожденный полиномами P (отвечающими всевозможным полустабильным векторам $x_0 \in X^1$). Алгебраическое многообразие в K^N , определенное этим идеалом, состоит в точности из нуль-форм. Так как по определению все инварианты исчезают на нуль-формах, теорема о нулях утверждает, что некоторая степень любого инварианта принадлежит $\mathfrak{J}$. Поскольку можно (по крайней мере теоретически) найти конечную систему образующих степени $\leq M'$ идеала $\mathfrak{J}$, все сводится к построению системы образующих «корня»²⁾ идеала $\mathfrak{J}$. И снова гильбертово доказательство теоремы о нулях показывает, как это можно сделать (опять-таки теоретически) явным образом.

Чтобы решить задачу (Р), Гильберт доказывает прежде всего следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть $x_0 \neq 0$ — произвольный вектор из X , и пусть $B \subset K[Y_{11}, \dots, Y_{nn}]$ — подкольцо, порожденное N координатами вектора $(Y_{ij}) \cdot x_0$ (они являются полиномами от Y_{ij} фиксированной степени p). Для того чтобы вектор x_0 был полустабильным, необходимо и достаточно, чтобы полином $\det(Y_{ij})$ из $K[Y_{11}, \dots, Y_{nn}]$ был целым над подкольцом B .

Доказывая необходимость, допустим, что вектор x_0 полустабильен. Тогда найдется по крайней мере один такой однородный полиномиальный инвариант P , что

¹⁾ То есть полиномами, которые строятся по каждому полустабильному вектору $x_0 \in X$ в силу задачи (Р). — Прим. перев.

²⁾ То есть идеала, образованного такими элементами f кольца R , что некоторая их степень принадлежит $\mathfrak{J}$. — Прим. перев.

$P(x_0) \neq 0$. Если $g > 0$ — его вес, то имеет место тождество

$$P((Y_{ij}) \cdot x_0) = \det(Y_{ij})^g P(x_0),$$

и, поскольку $(P(x_0))^{-1} \in K$, это уравнение целой зависимости полинома $\det(Y_{ij})$ над кольцом B .

Предположим, обратно, что задано уравнение целой зависимости для $\det(Y_{ij})$ над B :

$$(\det(Y_{ij}))^m + P_1((Y_{ij}) \cdot x_0) (\det(Y_{ij}))^{m-1} + \dots \\ \dots + P_m((Y_{ij}) \cdot x_0) = 0, \quad (6)$$

в котором P_j — полиномы от $X_1, \dots, X_N$, которые можно, очевидно, считать однородными и непостоянными в силу однородности $\det(Y_{ij})$. Чтобы прийти к противоречию, допустим, что x_0 — нуль-форма. Тогда в силу критерия Гильберта — Мамфорда из § 4 можно вместо матрицы (Y_{ij}) с неопределенными коэффициентами подставить в (6) матрицу $D(T)$ вида (1) и получить в качестве рациональных функций $P_j(D(T) \cdot x_0)$ полиномы без постоянного члена по T ; а так как $\det(D(T)) = 1$, то это невозможно.

Чтобы применить эту лемму, заметим, что, поскольку кольцо B конечно порождено, среди N координат вектора $(Y_{ij}) \cdot x_0$ найдется некоторое число алгебраически независимых элементов $z_1, \dots, z_r$ (над K), таких, что кольцо B цело над подкольцом $B' = K[z_1, \dots, z_r]$ (лемма Э. Нётер о нормализации). Так как вектор x_0 полустабилен, из леммы 4 вытекает, что полином $\det(Y_{ij})$ цел также и над B' . А поскольку B' — целозамкнутое кольцо, коэффициенты минимального уравнения полинома $\det(Y_{ij})$ над полем частных $E' = K(z_1, \dots, z_r)$ кольца B' принадлежат B' . Мы собираемся вывести отсюда, что в уравнении

$$(\det(Y_{ij}))^q + Q_1((Y_{ij}) \cdot x_0) (\det(Y_{ij}))^{q-1} + \dots \\ \dots + Q_q((Y_{ij}) \cdot x_0) = 0 \quad (7)$$

каждое $Q_k(x_0)$ является значением в точке x_0 инвариантного полинома. В самом деле, для каждого

элемента $s \in \mathbf{SL}(n, K)$ в уравнение (7) можно подставить вместо матрицы (Y_{ij}) матрицу $(Y_{ij})s$ и получить, что левая сторона все еще будет равна нулю. Так как $\det((Y_{ij})s) = \det(Y_{ij})$, это возможно, только если при всех k

$$Q_k((Y_{ij}) \cdot (s \cdot x_0)) = Q_k((Y_{ij}) \cdot x_0),$$

и, заменяя (Y_{ij}) единичной матрицей, находим, что

$$Q_k(s \cdot x_0) = Q_k(x_0) \quad \text{для всех } s \in \mathbf{SL}(n, K). \quad (8)$$

Из леммы Нагаты (лемма 1 гл. 3) мы знаем, что в кольце $K[X_1, \dots, X_n]$ существуют такие инвариантные однородные полиномы Q_k^* , что полиномы $Q_k - Q_k^*$ суть линейные комбинации с коэффициентами из K , полиномов вида $s \cdot Q_k - t \cdot Q_k$ (при s, t из $\mathbf{SL}(n, K)$). В силу (8) отсюда вытекает, что $Q_k(x_0) = Q_k^*(x_0)$.

Заменяя, наконец, в уравнении (7) (Y_{ij}) единичной матрицей, получаем

$$1 + Q_1^*(x_0) + \dots + Q_q^*(x_0) = 0,$$

и, следовательно, по крайней мере одно из чисел $Q_k^*(x_0)$ должно быть отлично от нуля. Вес инвариантного полинома Q_k^* равен k (в силу однородности), так что его степень есть kn/p (и, конечно, он равен нулю, если kn/p — нецелое число). Поскольку $kn/p \leq \leq qn/p$, видим, что задача (P) будет решена, если мы решим следующую задачу:

(P') Показать, что существует такое вычислимое число M'' , что степень q уравнения (7) ограничена для каждого полустабильного вектора $x_0 \in X$ числом M'' .

Это сделать, однако, нетрудно. Решение опирается на следующую элементарную лемму.

ЛЕММА 5. Пусть $H_1, \dots, H_{h+1}$ — однородные полиномы степени t от h переменных $u_1, \dots, u_h$ над полем K . Тогда если $L \geq h(t+1)^{h-1}$, то между по-

линомами H_i существует тождественное соотношение

$$\sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{h+1}} H_1^{\alpha_1} \dots H_{h+1}^{\alpha_{h+1}} = 0, \quad (9)$$

в котором $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{h+1} = L$ и не все коэффициенты $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{h+1}}$ (принадлежащие K) равны нулю.

Допустим, что лемма доказана. Дополним последовательность $z_1, \dots, z_r$ элементами $z_{r+1}, \dots, z_{n^2}$, выбранными среди Y_{ij}^p так, чтобы $z_1, \dots, z_{n^2}$ образовывали базис трансцендентности поля $K(Y_{11}, \dots, Y_{nn})$ над K . Поскольку элементы $z_{r+1}, \dots, z_{n^2}$ алгебраически независимы над $K(z_1, \dots, z_r)$, минимальный полином элемента $\det(Y_{ij})$ над полем $K(z_1, \dots, z_{n^2})$ будет тот же, что и над $K(z_1, \dots, z_r)$, и имеет поэтому степень q . Применим лемму 5 к полиномам $H_1, \dots, H_{h+1}$, равным $n^2 + 1$ однородным полиномам $(\det(Y_{ij}))^p, z_1^n, \dots, z_{n^2}^n$ степени pn от n^2 переменных $Y_{11}, \dots, Y_{nn}$. Так как $z_1, \dots, z_{n^2}$ алгебраически независимы над K , полином $(\det(Y_{ij}))^p$ должен входить в соответствующее равенство (9) и, следовательно,

$$q \leq M'' = pL = pn^2(pn + 1)^{n^2-1}. \quad (10)$$

Это вытекает из того, что, деля (9) на коэффициент при наибольшей степени $(\det(Y_{ij}))^p$, мы получаем из (9) уравнение для $\det(Y_{ij})$ с коэффициентами из $K(z_1, \dots, z_{n^2})$, которое должно быть кратным минимальному уравнению.

Осталось доказать лемму 5. Если обратить в нуль коэффициент при каждом мономе от переменных $u_1, \dots, u_h$ в равенстве (9), то получится система однородных линейных уравнений с $(L+1) \dots (L+h)/h!$ неизвестными $C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{h+1}}$. Число этих уравнений равно

$$(mL + 1) \dots (mL + h - 1)/(h - 1)!.$$

Итак, система имеет нетривиальные решения в предположении, что

$$(L + 1) \dots (L + h) > h(mL + 1) \dots (mL + h - 1),$$

и а fortiori это так, если

$$(L + 1)^h > h(mL + h - 1)^{h-1}. \quad (11)$$

Но поскольку неравенство $L \geq h(m + 1)^{h-1}$ влечет за собой $L \geq h$, из него вытекает также, что $mL + h - 1 < (m + 1)L$ и, следовательно,

$$L + 1 > h(m + 1)^{h-1} > h \left(\frac{mL + h - 1}{L + 1} \right)^{h-1},$$

а это и есть (11).

Цель этого приложения — дать замкнутое изложение теоремы Машке и теоремы перестановочности Шура. Определения модулей, алгебр, и пр. можно найти в книге Шевалле «Основные понятия алгебры»¹⁾. Мы будем иметь дело исключительно со следующими категориями:

(i) категория $\mathcal{V}$ конечномерных векторных Ω -пространств над алгебраически замкнутым полем Ω характеристики нуль, морфизмами которой являются линейные отображения,

(ii) категория $\mathcal{A}$ конечномерных Ω -алгебр A с единицей, морфизмами которой являются гомоморфизмы алгебр, переводящие единицу в единицу. Поле Ω можно рассматривать как подмножество в A . Соответствующее вложение имеет вид $\lambda \rightarrow \lambda \cdot 1$, и, следовательно, поле Ω лежит в центре алгебры A ,

(iii) категория $\mathcal{M}$, объектами которой являются объекты E категории $\mathcal{V}$, наделенные структурой левого A -модуля над некоторым объектом A категории $\mathcal{A}$, а морфизмами — гомоморфизмы A -модулей. Требуется еще, чтобы A -модуль E был унитарен, т. е. $1 \cdot x = x$ для всех $x \in E$.

Часть I. Простые модули

Предположим, что E есть A -модуль из категории $\mathcal{M}$. Под эндоморфизмом модуля E будем понимать элемент группы $\text{Hom}_{\Omega}(E, E) = \text{End}(E)$. Если $s \in A$, то соответствие $x \rightarrow sx$ определяет в $\text{End } E$ элемент $U(s)$, который можно рассматривать как

¹⁾ См. также «Алгебру» Ленга, («Мир», М., 1968). — Прим. перев.

матрицу. Отображение $s \rightarrow U(s): A \rightarrow \text{End}(E)$ является гомоморфизмом алгебр. Таким образом, каждому A -модулю E сопоставляется представление $A \rightarrow \text{End}(E)$.

Напомним, что A -модули E и F изоморфны, если существует такой изоморфизм $\varphi: E \rightarrow F$ векторных пространств, что $\varphi(sx) = s\varphi(x)$ для всех $s \in A$ и $x \in E$. Если $U: A \rightarrow \text{End}(E)$ и $V: A \rightarrow \text{End}(F)$ — соответствующие представления и P — матрица отображения φ , то $PU(s) = V(s)P$. Итак, $PU(s)P^{-1} = V(s)$ и представления U и V эквивалентны. Более общим образом, если $\varphi: E \rightarrow F$ — произвольный гомоморфизм A -модулей, то $PU(s) = V(s)P$ при $s \in A$.

Таким образом, мы видим, что A -модуль E можно рассматривать как представление кольца A в кольце $\text{End}(E)$, и наоборот. Линейное подпространство H в E , такое, что для всех $x \in H$ и $s \in A$ имеем $sx \in H$, называется *подмодулем* в E . Эквивалентная формулировка: линейное подпространство H в E должно быть инвариантно относительно образа кольца A в $\text{End}(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. A -модуль $E \neq \{0\}$ называется *простым*, если он не имеет нетривиальных собственных подмодулей. Представление, отвечающее простому A -модулю, называется *неприводимым представлением* алгебры A .

Если $H \neq \{0\}$ — подпространство в E , то его базис $e_1, \dots, e_k$ всегда можно продолжить до базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства E . Условие $U(s)x \in H$ при $x \in H$ означает, что для некоторой неособой $n \times n$ -матрицы P

$$P^{-1}U(s)P = \begin{pmatrix} V(s) & R(s) \\ 0 & W(s) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $V(s)$ — матрица порядка $k \times k$. Неприводимость представления алгебры A в алгебре $\text{End}(E)$ состоит в том, что не существует матрицы P , для которой равенство (1) выполнялось бы при всех $s \in A$.

Предложение. *A -модуль E прост в том и только том случае, когда $A \cdot x = E$ для любого ненулевого элемента $x \in E$.*

В самом деле, если $x \neq 0$, то $A \cdot x$ — нетривиальный подмодуль в E . $\square$

Пример. Векторное пространство $E \neq \{0\}$ является в силу предыдущего предложения простым $\text{End}(E)$ -модулем.

Теперь мы в состоянии сформулировать наш первый фундаментальный результат.

Лемма Шура I. *Предположим, что E и F суть A -модули, причем модуль E прост. Если $u: E \rightarrow F$ — гомоморфизм A -модулей, то либо $u = 0$, либо u инъективен. Если модуль F также прост, то или $u = 0$, или u биективен.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что если $u \neq 0$, то $u^{-1}(0)$ будет собственным подмодулем в E и потому $u^{-1}(0) = \{0\}$. Когда модуль F прост и $u \neq 0$, отображение $u: E \rightarrow u(E)$ является изоморфизмом, а так как $u(E)$ — ненулевой подмодуль в F , он должен равняться F . $\square$

Замечание. В терминах представлений первая лемма Шура звучит так: если $s \rightarrow U(s)$ и $s \rightarrow V(s)$ — два неприводимых представления алгебры A и матрица P такова, что $PU(s) = V(s)P$, то или $P = 0$, или P — обратимая матрица.

Введем для A -модуля E обозначение $\text{End}_A(E) = \text{Hom}_A(E, E)$.

Лемма Шура II. *Пусть E — простой A -модуль. Тогда $\text{End}_A(E) \cong \Omega$.*

Доказательство. В силу первой леммы Шура кольцо $\text{End}_A(E)$ будет телом. Пусть $\mu \in \text{End}_A(E) \setminus \Omega$ и $\Omega(\mu)$ — наименьшее подтело в $\text{End}_A(E)$, содержащее Ω и μ . Поскольку Ω принадлежит центру кольца $\text{End}_A(E)$, тело $\Omega(\mu)$ является полем. Так как $\text{End}_A(E) \subseteq \text{End}(E)$ и алгебра $\text{End}(E)$ конечномерна над полем Ω , то степени $1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^n$ должны быть при неко-

тором n линейно зависимы. Отсюда вытекает, что μ — корень полинома с коэффициентами из Ω и, следовательно, $\Omega(\mu)$ — конечное расширение поля Ω . Так как поле Ω алгебраически замкнуто, оно не имеет собственных конечных расширений и $\Omega(\mu) = \Omega$, что влечет за собой утверждение леммы.

Итак, если U — неприводимое представление алгебры A и $P U(s) = U(s) P$ при всех $s \in A$, то $P = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \Omega$.

Часть II. Полупростые модули

Прежде всего напомним некоторые элементарные понятия теории модулей. Если M — модуль и $(N_i)_{i \in I}$ — семейство его подмодулей, то через $\sum_{i \in I} N_i$ обозначим подмодуль N в M , порожденный множеством $\bigcup_{i \in I} N_i$. Модуль N называется *суммой* семейства $(N_i)_{i \in I}$. Если $N_i \cap \sum_{j \neq i} N_j = \{0\}$ для всех $i \in I$, то говорят, что N — *прямая сумма* семейства $(N_i)_{i \in I}$. В этом случае мы будем писать $N = \sum_{i \in I} N_i$ (direct). Когда $I = \{1, \dots, p\}$, мы будем обычно вместо $\sum_{i \in I} N_i$ (direct) писать $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_p$ ¹⁾.

ТЕОРЕМА. Пусть $M \neq \{0\}$ есть A -модуль из категории $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) M является суммой (быть может, бесконечной) простых подмодулей,
- (ii) M является прямой суммой конечного числа простых подмодулей,
- (iii) каждый подмодуль P в M является прямым слагаемым.

Если модуль M представим в виде суммы семейства простых подмодулей, скажем $M = \sum_{\alpha \in I} N_{\alpha}$, и P —

¹⁾ Этим же обозначением в виде $\bigoplus_{i \in I} N_i$ пользуются и в общем случае. — Прим. перев.

подмодуль в M , то в I существует такое конечное подмножество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, что $M = P \oplus N_{\alpha_1} \oplus N_{\alpha_2} \oplus \dots \oplus N_{\alpha_k}$.

Доказательство можно найти у Шевалле на стр. 61¹⁾.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Модуль M , удовлетворяющий любому из приведенных выше условий, называется *полупростым*.

СЛЕДСТВИЕ. Фактормодули и подмодули полупростых модулей полупросты.

ПРИМЕР. Каждое конечномерное векторное Ω -пространство является полупростым Ω -модулем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полупростой модуль M называется *изотипическим* типа N , если $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ и каждый модуль N_i прост и изоморфен N .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Полупростой A -модуль M представим однозначным образом в виде $M_1 \oplus \dots \oplus M_r$, где каждый модуль M_i изотипичен и типы модулей M_i и M_j различны при $i \neq j$. Каждый простой подмодуль $P \subset M$ содержится ровно в одном модуле M_i , и при этом P изоморфен типу модуля M_i . Наконец, если $i \neq j$, то M_i и M_j не изоморфны как A -модули.

Доказательство. Напишем $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_p$, где каждый модуль N_i прост. Пусть $M_1 = \sum_{N_j \cong N_1} N_j$

и i_2 — наименьший индекс, для которого модуль N_{i_2} не изоморфен N_1 . Положим

$$M_2 = \sum_{N_j \cong N_{i_2}} N_j.$$

Поступая таким образом до тех пор, пока мы не исчерпаем всех N_i , получим разложение $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ в прямую сумму, в котором каждый модуль M_i изотипичен и типы модулей M_i и M_j раз-

¹⁾ Или у Ленга на стр. 492. — Прим. перев.

личны при $i \neq j$. Если N — произвольный простой подмодуль, то при некотором i имеется изоморфизм $N \cong N_i$, ибо в противном случае каждая проекция $p_i: M \rightarrow N_i$, ограниченная на N , была бы равна нулю в силу первой леммы Шура. Кроме того, если модуль N_j не изоморфен N_i , то проекция $p_j: N \rightarrow N_j$ равна нулю. Отсюда вытекает, что подмодуль N принадлежит одному из модулей M_k . Наконец, если $M_i \cong M_j$, то простые подмодули модулей M_i и M_j одинаковы и $i = j$. $\square$

Определение. Разложение $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ предыдущего предложения называется *изотипическим разложением* модуля M , а модули M_i — его *изотипическими компонентами*.

Закончим этот раздел вычислением кольца $\text{End}_A(M)$ для полупростого A -модуля M . Кольцо $\text{End}_A(M)$ будет рассматриваться как Ω -алгебра, и все изоморфизмы будут изоморфизмами алгебр. Обозначим через $M_n(\Omega)$ алгебру матриц порядка $n \times n$ над полем Ω . Пусть $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ — изотипическое разложение модуля M и $M_i = N_{i1} \oplus \dots \oplus N_{ij_i}$, где все модули N_{ik} просты и изоморфны модулю N_i , типу модуля M_i .

Если $\mu \in \text{End}_A(M)$, то отображение $\mu|_{N_{ik}}$ либо равно нулю, либо инъективно, и в последнем случае $\mu(N_{ik}) \cong N_{ik}$. Следовательно, $\mu(N_{ik}) \subset M_i$ при всех $k = 1, \dots, j_i$ и $\mu(M_i) \subset M_i$. Таким образом, $\text{End}_A(M) \cong \text{End}_A(M_1) \oplus \dots \oplus \text{End}_A(M_r)$. Более того, имеем $\text{End}_A(M_i) \text{End}_A(M_j) = \{0\}$, если $i \neq j$. Оба эти факта можно выразить, написав, что $\text{End}_A(M) = \prod_{i=1}^r \text{End}_A(M_i)$.

Найдем теперь кольцо $\text{End}_A(M)$ для *изотипического* модуля M . Допустим, что $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$, где модули N_i просты для всех i и $N_i \cong N$. Для $j = 1, \dots, s$ обозначим через $p_j: M \rightarrow N_j$ проекцию модуля M на N_j . Отображения p_j дают возможность сопоставить каждому эндоморфизму $u \in \text{End}_A(M)$

матрицу $U = (u_{ij})$ порядка $s \times s$, в которой $u_{ij} \in \text{Hom}_A(N_j, N_i)$ при всех i и j . Точнее,

$$u_{ij} = p_i \circ (u|N_j): N_j \rightarrow N_i.$$

Легко видеть, что для эндоморфизмов $u, v \in \text{End}_A(M)$ и $w = vu$ выполняется равенство $W = VU$. Иначе

говоря, $w_{ij} = \sum_{k=1}^s v_{ik} u_{kj}$.

Фиксируем теперь при каждом i изоморфизм $\varphi_i: N_i \xrightarrow{\sim} N$. Отображение $\psi_{ij}: \text{Hom}_A(N_j, N_i) \rightarrow \text{End}_A(N)$, задаваемое формулой $\psi_{ij}(f) = \varphi_i f \varphi_j^{-1}$, является изоморфизмом Ω -модулей. Кроме того, если $f_{kj} \in \text{Hom}_A(N_j, N_k)$ и $g_{ik} \in \text{Hom}_A(N_k, N_i)$, то $\psi_{ij}(g_{ik} f_{kj}) = \psi_{ik}(g_{ik}) \psi_{kj}(f_{kj})$. Из второй леммы Шура получаем, что $\text{End}_A(N) \cong \Omega$. (В этой лемме мы доказали, что если $f \in \text{End}_A(N)$, то при некотором $\lambda \in \Omega$ для любого $x \in N$ справедливо равенство $f(x) = \lambda x$.) Из этих фактов вытекает, что композиция

$$\Psi: u \rightarrow (u_{ij}) \rightarrow (\psi_{ij} u_{ij}): \text{End}_A(M) \rightarrow M_s(\Omega)$$

определяет гомоморфизм Ω -алгебр. Немедленно проверяется, что морфизм Ψ биективен (легко построить морфизм Ψ^{-1}). Собирая вместе доказанное нами, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Если M — полупростой A -модуль с изотипическим разложением $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$, то $\text{End}_A(M) \cong \prod_{i=1}^r M_{j_i}(\Omega)$, где $j_i = \dim_A M_i$ для каждого i .

Отметим, что равенство $\dim_A M = j$ означает, что можно написать $M = N_1 \oplus \dots \oplus N_j$, где каждый A -модуль N_i прост.

Замечание. В терминах представлений полупростым модулям отвечают вполне приводимые пред-

ставления U , т. е. представления вида

$$U(s) = \begin{pmatrix} U_1(s) & & & 0 \\ & U_2(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_p(s) \end{pmatrix}$$

где представления $U_i(s)$ неприводимы.

Часть III. Полупростые алгебры

ТЕОРЕМА. Для произвольной Ω -алгебры A следующие условия эквивалентны:

- (i) каждый A -модуль полупрост,
- (ii) модуль A_s (это кольцо A , рассматриваемое как левый A -модуль) полупрост.

Доказательство. Утверждение (ii) тривиально следует из (i). Допустим, что модуль A_s полупрост и M — произвольный A -модуль. Ясно, что $M = \sum_{m \in M} A \cdot m$. Имеется естественный сюръективный морфизм $A_s \rightarrow A \cdot m$, определенный соответствием $a \rightarrow am$. Он является гомоморфизмом (левых) A -модулей и потому $A \cdot m = A_s/P$ для некоторого подмодуля P в A_s . Но модуль A_s/P , являясь фактормодулем полупростого модуля, сам будет полупростым. Отсюда вытекает, что модуль M есть сумма простых подмодулей и, следовательно, полупрост.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебра A , удовлетворяющая любому из приведенных выше условий, называется *полупростой*. Если алгебра A полупроста, то простые подмодули из A_s называются ее *минимальными левыми идеалами*.

ПРИМЕР. Пусть $M_n(\Omega)$ обозначает алгебру матриц порядка $n \times n$ над полем Ω , и пусть $E_{ij} \in M_n(\Omega)$ — матрица, ij -й элемент которой равен 1, а остальные — нулю. Тогда $\mathcal{L}_i = \Omega E_{1i} \oplus \dots \oplus \Omega E_{ni}$ (i -й столбец) — минимальный левый идеал в $M_n(\Omega)$ и $M_n(\Omega) =$

$= \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n$. Тем самым, алгебра $M_n(\Omega)$ полупроста.

Существует элегантное описание минимальных левых идеалов алгебры $M_n(\Omega)$. Оказывается, что они в точности соответствуют гиперплоскостям пространства $E = \Omega^n$. Это делается следующим образом. Выберем в E базис $e_1, \dots, e_n$ и обычным образом отождествим $\text{End}(E)$ с $A = M_n(\Omega)$. Если H — гиперплоскость в E , то положим

$$\mathcal{L}_H = \{u \in \text{End}(E); \ker u \supset H\}.$$

Тогда $\mathcal{L}_H$ будет минимальным левым идеалом в A и каждый минимальный левый идеал в A имеет вид $\mathcal{L}_H$. Чтобы убедиться, что идеал $\mathcal{L}_H$ минимален, выберем изоморфизм $\varphi: H \rightarrow H_1$, где H_1 — гиперплоскость, порожденная векторами $e_2, \dots, e_n$. Определим

$$\varphi^* \in \text{Hom}_A(\mathcal{L}_H, \mathcal{L}_1),$$

полагая $\varphi^* u = u\varphi$. Ясно, что φ^* — изоморфизм, так что идеал $\mathcal{L}_H$ минимален.

Если $\mathcal{L}$ — минимальный левый идеал алгебры A , выберем $u \neq 0 \in \mathcal{L}$, и пусть V — подпространство в $u(E)$ коразмерности 1. Тогда $H = u^{-1}(V)$ — гиперплоскость в E , и утверждается, что $\mathcal{L}_H = \mathcal{L}$. Возьмем элемент $v \in A$ так, чтобы $v(V) = \{0\}$, но $v(u(E)) \neq \{0\}$. Имеем $vu \neq 0$, $vu \in \mathcal{L}_H$ и, следовательно, $\mathcal{L}_H = A(vu) = \mathcal{L}$.

Минимальные правые идеалы алгебры A допускают аналогичное описание. Каждый из них состоит из всевозможных таких элементов $u \in A$, что $\text{Im } u$ содержится в фиксированной прямой в E .

ТЕОРЕМА Молина. Каждая полупростая алгебра A изоморфна прямому произведению матричных колец над полем Ω , т. е. $A \cong \prod_{j=1}^r M_{n_j}(\Omega)$, где r — число изотипических компонент алгебры A .

Доказательство. Сначала нам понадобится одна общая лемма.

ЛЕММА. Пусть R — кольцо с единицей. Тогда $\text{End}_R(R_s) \cong R^\circ$, где R° — кольцо, противоположное R .

Доказательство. Напомним, что R° — это кольцо R , в котором умножение производится в обратном порядке. Определим, полагая $t_x(y) = yx$, элемент $t_x \in \text{End}_R(R_s)$ для $x \in R$. Поскольку $t_{xx'} = t_x t_{x'}$, t является (кольцевым) гомоморфизмом из R° в $\text{End}_R(R_s)$. Если $u \in \text{End}_R(R_s)$ и $u(1) = x$, то $u(y) = yx$ для всех $y \in R$ и $u = t_x$. Если $t_x = 0$, то $t_x(1) = 1 \cdot x = 0$, так что $x = 0$. Таким образом, t — биекция.

Если A — алгебра над полем Ω , то изоморфизм $A^\circ \cong \text{End}_A(A_s)$ является изоморфизмом алгебр. Следовательно, если алгебра A полупроста, то в силу одной из предыдущих теорем $A^\circ \cong \prod_{j=1}^r M_{n_j}(\Omega)$. Поскольку Ω — поле, отображение $X \rightarrow {}^t X$ определяет изоморфизм $M_{n_j}(\Omega) \cong M_{n_j}(\Omega)^\circ$, что и доказывает теорему Молина.

Отметим, что в силу результатов части II каждый сомножитель $M_{n_j}(\Omega)$ соответствует при этом изоморфизме некоторой изотипической компоненте алгебры A . Таким образом, если $A_1, \dots, A_r$ — изотипические компоненты алгебры A , то $A = \prod_{i=1}^r A_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A — полупростая алгебра и M — некоторый A -модуль. Если $A_1, \dots, A_r$ — изотипические компоненты модуля A_s , то модули $A_1 M, \dots, A_r M$ будут в точности изотипическими компонентами модуля M .

Доказательство. Очевидно, что $M = \sum_i A_i M$. Сумма $\sum A_i M$ является прямой, так как, если

$$x \in A_j M \cap \sum_{i \neq j} A_i M$$

и e_j — компонента единицы алгебры A в подалгебре A_j , то $e_j x = x$ и $e_i \sum_{j \neq i} A_j M = \{0\}$. Отсюда $x = 0$.

Если $N \subset M$ — простой модуль, то из разложения $N = A_1 N \oplus \dots \oplus A_r N$ следует, что $N = A_i N$ в точности при одном i . Итак, $N \subset A_i M$. Два изоморфных простых подмодуля в M должны содержаться в одном и том же модуле $A_i M$, так что $A_1 M, \dots, A_r M$ — изотипические компоненты модуля M .

ТЕОРЕМА (Молин). Для полупростой алгебры A над полем Ω следующие условия эквивалентны:

- (i) существует только один тип¹⁾ простых A -модулей,
- (ii) в A нет нетривиальных собственных двусторонних идеалов,
- (iii) $A \cong M_n(\Omega)$.

Доказательство. Тот факт, что утверждение (i) эквивалентно (iii), следует из теоремы Молина и того, что число типов простых подмодулей равно числу изотипических компонент. Тот факт, что из (ii) следует (i), вытекает из того, что каждая изотипическая компонента является в A двусторонним идеалом. Нам осталось показать, что (iii) влечет за собой (ii). Пусть $\mathcal{A} \neq \{0\}$ — двусторонний идеал алгебры $A = M_n(\Omega)$, и пусть $\mathcal{L}_H$ — минимальный левый идеал из $\mathcal{A}$, отвечающий гиперплоскости $H \subset \Omega^n$. Напомним, что $\mathcal{L}_H = \{U \in M_n(\Omega); \ker U \supset H\}$. Если теперь H' — любая другая гиперплоскость из Ω^n и s — изоморфизм пространства Ω^n , переводящий H' в H , то $\mathcal{L}_{H'} = \mathcal{L}_H s$. Поскольку $\mathcal{A}$ — правый идеал, $\mathcal{L}_{H'} \subset \mathcal{A}$. Это показывает, что любой минимальный левый идеал алгебры A содержится в $\mathcal{A}$, так что $\mathcal{A} = A$ (алгебра A полупроста и является потому прямой суммой минимальных левых идеалов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полупростая алгебра A называется *простой*, если она удовлетворяет любому из приведенных выше условий.

Итак, любая полупростая алгебра A представляется в виде $A = \prod_{i=1}^r A_i$, где каждая алгебра A_i

¹⁾ С точностью до изоморфизма. — Прим. перев.

проста. Это разложение будет называться *простым разложением* алгебры A , а алгебры A_i — ее *простыми компонентами*. Кроме того, произвольный минимальный двусторонний идеал B алгебры A совпадает с одним из идеалов A_i . В самом деле,

$$B = A_1 B \oplus \dots \oplus A_r B$$

и каждый $A_i B$ является двусторонним идеалом в A , так что минимальность идеала B влечет за собой для некоторого j равенство $B = A_j B$. Но $A_j B \subset A_j$ и $B = A_j$ в силу полупростоты алгебры A_j . Итак, мы имеем

Предложение. Пусть A — полупростая алгебра с простыми компонентами $A_1, \dots, A_r$. Каждый двусторонний идеал из A имеет вид $\prod_{j \in F} A_j$, где F — какое-либо конечное подмножество из $\{1, 2, \dots, r\}$. Таким образом, любой фактор алгебры A по ее двустороннему идеалу будет снова полупростой алгеброй. В частности, гомоморфный образ полупростой алгебры полупрост.

Часть IV. Теорема Машке и теорема перестановочности Шура

Предположим, что G — конечная группа и $\Omega[G]$ — ее групповая алгебра. Алгебру $\Omega[G]$ можно вкратце описать следующим образом. Как векторное Ω -пространство $\Omega[G]$ является векторным пространством, базис которого составляют элементы группы G . Пространство $\Omega[G]$ становится Ω -алгеброй, если положить

$$\left(\sum_{r \in G} \lambda_r r \right) \cdot \left(\sum_{s \in G} \mu_s s \right) = \sum_{r, s \in G} (\lambda_s \mu_s) r \cdot s.$$

Здесь $\lambda_r, \mu_s \in \Omega$. Единичный элемент e группы G будет единицей кольца $\Omega[G]$.

ТЕОРЕМА МАШКЕ. Если G — конечная группа порядка m , то ее групповая алгебра $\Omega[G]$ полупроста.

Доказательство. Обозначим $\Omega[G]$ через A и рассмотрим произвольный конечномерный A -модуль E . Чтобы показать, что модуль E полупрост, нужно доказать, что каждый подмодуль F в E имеет дополнительный подмодуль W . Возьмем векторное пространство W , дополнительное к F в E . Имеем разложение $E = W \oplus F$ векторных пространств и проекцию $p: E \rightarrow F$. Определим отображение $p_0: E \rightarrow F$ формулой

$$p_0(x) = m^{-1} \sum_{s \in G} sp(s^{-1}x).$$

Ясно, что p_0 линейно. Если $t \in G$, то

$$\begin{aligned} mp_0(tx) &= \sum_{s \in G} sp(s^{-1}tx) = \sum_{s \in G} t(s^{-1}t)^{-1} p(s^{-1}tx) = \\ &= \sum_{u \in G} t up(u^{-1}x) = t(mp_0(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, p_0 является A -гомоморфизмом. Для $y \in F$ справедливо равенство $p(s^{-1}y) = s^{-1}y$, так что $p_0(y) = y$. Мы получаем, что $p_0 p_0 = p_0$. Следовательно, $(1 - p_0)E$ будет A -подмодулем в E , дополнительным к F .

Результат Машке имеет красивое обобщение, которое первым обнаружил в 1897 году Гурвиц [12].

ТЕОРЕМА. Пусть G — компактная группа и ds — (нормализованная) мера Хаара на G . Рассмотрим непрерывное представление $s \rightarrow U(s)$ группы G в группе $GL(E)$, где E — конечномерное комплексное векторное пространство. Если $F \subset E$ есть G -модуль (т. е. F инвариантно относительно $U(G)$), то $y F$ есть дополнительный G -модуль H^1 .

Доказательство в точности таково, как и для теоремы Машке. Нужно лишь заменить $m^{-1} \sum_{s \in G}$ на $\int_G ds$.

¹⁾ Рассуждения Гурвица относятся к ортогональной группе, однако, в этой же работе он заметил, что его конструкция годится для любой компактной группы Ли. — Прим. перев.

Следствие. *Каждая компактная подгруппа в $GL(n, \mathbb{C})$ редуктивна.*

Имеется удобный способ для нахождения числа простых компонент полупростой алгебры A . Мы используем его, чтобы найти число простых компонент алгебры $\Omega[\mathcal{G}_f]$. Пусть A — полупростая алгебра и $A = \prod_{i=1}^r A_i$ — ее разложение на простые компоненты. Центр Z алгебры A имеет аналогичное разложение $Z = \prod_{i=1}^r Z_i$, в котором Z_i — центр алгебры A_i . Но так как $A_i \cong M_n(\Omega)$ при некотором n и центр алгебры $M_n(\Omega)$ равен как раз Ω , то

Предложение. *Число простых компонент полупростой алгебры A равно размерности ее центра над полем Ω .*

Предложение. *Если G — конечная группа, то число простых компонент алгебры $\Omega[G]$ есть в точности число классов сопряженных элементов в G .*

Доказательство. Ввиду предыдущего предложения нужно вычислить $\dim_{\Omega} Z$, где Z — центр алгебры $\Omega[G]$. Пусть $z = \sum_{s \in G} \lambda_s s$ — элемент центра. Из условия $tzt^{-1} = z$, справедливого при всех $t \in G$, вытекает, что $\sum_{s \in G} \lambda_s tst^{-1} = \sum_{s \in G} \lambda_s s$. Поэтому, если s и s' сопряжены, то $\lambda_{s'} = \lambda_s$. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ — классы сопряженности группы G . Элемент z можно однозначно представить в виде

$$\lambda_1 \sum_{s \in \gamma_1} s + \dots + \lambda_r \sum_{s \in \gamma_r} s,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Omega$. Поскольку каждый элемент такого вида принадлежит центру, получаем требуемое. $\square$

Теперь мы перейдем к доказательству теоремы перестановочности Шура, формулировку которой отложим до конца доказательства. Предположим, что B — полупростая подалгебра в $A = M_N(\Omega)$ (и, следо-

вательно, единица алгебры A принадлежит B). Мы хотим выяснить, как расположены алгебра B и ее коммутант

$$C = \{W \in M_N(\Omega); WU = UW \text{ для всех } U \in B\}$$

по отношению друг к другу в алгебре A .

Пусть $V = \Omega^N$. Тогда $A = \text{End}(V)$ и B можно рассматривать как подалгебру в $\text{End}(V)$. Поскольку $1 \in B$, пространство V является B -модулем, и так как алгебра B полупроста, модуль V также полупрост. Пусть $B_1, \dots, B_r$ — простые компоненты алгебры B . Тогда $V = B_1 V \oplus \dots \oplus B_r V$ будет изотипическим разложением модуля V .

Каждое слагаемое $B_i V$ можно записать как прямую сумму $V_{i1} \oplus \dots \oplus V_{im_i}$ таких простых подмодулей в V , что для всех $i = 1, \dots, r$ и всех $j = 1, \dots, m_i$ существует изоморфизм B -модулей $\varphi_{ij}: V_{i1} \rightarrow V_{ij}$. Возьмем в качестве φ_{i1} тождественный морфизм и обозначим для каждого i через $e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(n_i)}$ базис пространства V_{i1} . Векторы

$$\varphi_{ij}(e_i^{(1)}), \dots, \varphi_{ij}(e_i^{(n_i)})$$

служат базисом в пространстве V_{ij} при $1 \leq j \leq m_i$. Собирая вместе эти базисы пространств V_{ij} , получаем базис

$$e_1^{(1)}, \dots, e_1^{(n_1)}, \varphi_{12}(e_1^{(1)}), \dots, e_2^{(1)}, \dots, e_2^{(n_2)}, \varphi_{22}(e_2^{(1)}), \dots$$

пространства V , в котором эндоморфизм U из B имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} U_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & U_{1m_1} & & \\ & & & U_{21} & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & U_{rm_r} \end{pmatrix} \quad (2)$$

с $U_{ij} \in M_{n_i}(\Omega)$. Это следует из того факта, что V_{ij} суть B -модули. Заметим теперь, что подалгебру B можно заменить на полупростую подалгебру $P^{-1}BP$ в $M_N(\Omega)$, где $P \in M_N(\Omega)$ — обратимая матрица.

Из равенств $\varphi_{ij}(Ux) = U\varphi_{ij}(x)$ для всех $x \in V$ следует, что $U_{i1} = \dots = U_{im_i}$ для любого i . Таким образом, матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_r \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$T_i = \begin{pmatrix} U_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Обозначим через $M_{n_i}^{m_i}(\Omega)$ множество всех матриц вида (4), у которых на диагонали стоят m_i копий некоторой матрицы $U \in M_{n_i}(\Omega)$.

Матрица U_i может быть совершенно произвольной матрицей из $M_{n_i}(\Omega)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что пространство V_{i1} является также простым B_i -модулем. Но из простоты алгебры B_i вытекает, что $B_i \cong M_{q_i}(\Omega)$ при некотором q_i . Таким образом, пространства Ω^{q_i} и V_{i1} будут простыми B_i -модулями и, следовательно, они изоморфны и $q_i = n_i$. Отсюда вытекает, что $B \cong \prod_{i=1}^r M_{n_i}^{m_i}(\Omega)$. Итак, мы нашли общий

вид полупростых подалгебр из $M_N(\Omega)$. Каждая такая подалгебра определяется набором положительных целых чисел $(m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_r)$, в котором

$$\sum_{i=1}^r m_i n_i = N.$$

Обратимся теперь к коммутанту C алгебры B . На основании выражения (3) для матрицы $U \in B$ матрица $W \in C$ записывается в виде

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_{21} & W_{22} & & & \\ \vdots & & \cdot & & \\ \vdots & & & \cdot & \\ \vdots & & & & W_{rr} \end{pmatrix},$$

где W_{ij} — матрицы порядка $p_i \times p_j$ и $p_i = m_i n_i$. Из уравнения $UW = WU$ находим, что $T_i W_{ij} = W_{ij} T_j$ при всех $i, j = 1, \dots, r$. Но в силу того, что матрицы U_i и U_j произвольны, это означает, что $W_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Итак, матрица $W \in C$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} W_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & & W_r \end{pmatrix},$$

где $W_i T_i = T_i W_i$ для всех $T_i \in B_i$. Выводим отсюда что $C = \prod_{i=1}^r C_i$ и C_i — коммутанты алгебр B_i .

Таким образом, достаточно определить структуру коммутанта простой подалгебры B из $M_q(\Omega)$. Как B -модуль пространство $V = \Omega^q$ изотипично и $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, где модули V_i просты и имеют одинаковый тип. Как и выше, в каждом из них можно выбрать такой базис $f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(n)}$, что матрица $U \in B$ приводится к виду

$$\begin{pmatrix} S & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & & S \end{pmatrix} \quad (m \text{ копий } S),$$

в котором $S \in M_n(\Omega)$. Иначе говоря, $B \cong M_m^n(\Omega)$.

Если $W \in C$, то пишем

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ W_{m1} & \dots & W_{mm} \end{pmatrix},$$

где $W_{ki} \in M_n(\Omega)$. Условие $W \in C$ означает, что для всех $S \in M_n(\Omega)$ выполняется равенство $SW_{ki} = W_{ki}S$. Но центр алгебры $M_n(\Omega)$ состоит в точности из матриц вида λI_n при всевозможных $\lambda \in \Omega$. Таким образом, для всех i и k имеем $W_{ki} = \lambda_{ki} I_n$ для каких-то $\lambda_{ki} \in \Omega$. Следовательно, если $W \in C$, то

$$W(f_i^{(j)}) = \sum_{k=1}^m \lambda_{ki} f_k^{(j)}.$$

Это значит, что если переписать базис в виде $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_m^{(1)}, f_1^{(2)}, \dots$, то матрица W превращается в матрицу

$$\begin{pmatrix} (\lambda_{ij}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_{ij}) \end{pmatrix} \in M_m^n(\Omega),$$

в которой матрицы $(\lambda_{ij}) \in M_m(\Omega)$ совершенно произвольны. Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА ПЕРЕСТАНОВЧНОСТИ ШУРА. Пусть B — полупростая подалгебра в $M_N(\Omega)$ и $B_1, \dots, B_r$ — ее простые компоненты. Пусть n_i — размерность над полем Ω какого-нибудь простого B_i -модуля. Тогда

(i) $B \cong \prod_{i=1}^r M_{n_i}^{m_i}(\Omega)$, где алгебры $M_{n_i}^{m_i}(\Omega)$ определяются с помощью представления (4),

(ii) если C — коммутант алгебры B , то $C \cong \prod_{i=1}^r M_{m_i}^{n_i}(\Omega)$ и, в частности, алгебра C полупроста.

Пусть B — простая подалгебра в $M_N(\Omega)$, имеющая алгебру C своим коммутантом. Тогда $B \cong M_n^m(\Omega)$ и $C \cong M_m^n(\Omega)$, откуда вытекает простота алгебры C . Рассмотрим пространство Ω^N как C -модуль V_C . Модуль V_C изотипичен, и его простыми подмодулями являются подмодули размерности m над Ω (ибо каждый минимальный левый идеал в C имеет размерность m). Для любого $1 \leq i \leq n$ матрица $E_i = E_{i,i} + \dots + E_{n+i,n+i} + \dots + E_{(m-1)n+i,(m-1)n+i}$ порождает в алгебре B минимальный левый идеал, и при всех i справедливо соотношение $\dim_{\Omega} E_i V = m$. Действительно,

$$E_i V = \Omega f_1^{(i)} \oplus \Omega f_2^{(i)} \oplus \dots \oplus \Omega f_m^{(i)}.$$

В силу свойства перестановочности $CE_i V = E_i CV \subset E_i V$, так что $E_i V$ является простым C -модулем. Кроме того, $V_C = E_1 V \oplus \dots \oplus E_n V$.

Если алгебра B полупроста, то простые подмодули в V_C можно найти, рассматривая по отдельности ее простые компоненты. Предположим, что элементы $b, b' \in B$ порождают один и тот же минимальный левый идеал в B . Тогда $b' = u_1 b$, $b = u_2 b'$ и отображения $x \rightarrow u_1 x: bV \rightarrow b'V$, $x \rightarrow u_2 x: b'V \rightarrow bV$ будут (в силу свойства перестановочности) C -гомоморфизмами, обратными друг к другу. Следовательно, $bV \cong b'V$.

Предложение. *Каждый простой подмодуль в V_C изоморфен модулю вида bV , где b — образующая минимального левого идеала в B . Если b, b' порождают один и тот же минимальный левый идеал, то $bV \cong b'V$.*

Д. МАМФОРД

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ

Цель этой книги состоит в изучении двух связанных друг с другом задач: когда существует пространство орбит алгебраической схемы, на которой действует алгебраическая группа? Как построить схемы модулей алгебраических объектов различных типов? Вторая задача представляется, по существу, частным и весьма нетривиальным случаем первой. С точки зрения итальянских математиков трудность обеих задач заключается в переходе от бирациональной картины к бирегулярной. Построение как пространств орбит, так и модулей в общей точке представляет собой простое упражнение. Задача состоит в том, чтобы выделить в множестве всевозможных моделей построенного бирационального класса ту единственную модель, геометрические точки которой классифицируют множество орбит некоторого действия или множество алгебраических объектов некоторой проблемы модулей. В обоих случаях весьма вероятно, что некоторые орбиты или некоторые объекты являются исключительными, или, как мы будем говорить, нестабильными, в том смысле, что их следует удалить из нашей модели. Трудность заключается в том, чтобы в каждом данном случае выяснить смысл стабильности. Одна из наиболее интригующих нерешенных задач в этой связи касается модулей неособых поляризованных поверхностей. Какие из этих поверхностей нестабильны в том смысле, что для них и их деформаций не существует схемы модулей? Это свойство выглядит весьма тонким.

Одним из моих принципов было не слишком беспокоиться о различии между характеристикой 0 и конечными характеристиками. Поэтому большая часть этой книги посвящена теории, развиваемой лишь в характеристике 0 ¹⁾. Я, однако, убежден, что эта теория

¹⁾ Условие нулевой характеристики скрывается в предположении, что действующая группа редуکتивна (редуктивность у нас всегда означает, что все представления вполне приводимы). Но в характеристике p редуکتивными будут лишь довольно мало-значительные группы (см. [27]), так что теория становится неинтересной.

почти целиком справедлива во всех характеристиках. Необходимо только найти некоторое свойство полупростых групп во всех характеристиках, которое заняло бы место полной приводимости представлений, выполняющейся лишь в характеристике 0. Именно, у меня есть гипотеза, что если задано представление полупростой алгебраической группы G в векторном пространстве V и V_0 — инвариантное подпространство коразмерности 1, то инвариантное подпространство $V_0 \cdot S^{p^v-1}(V)$ коразмерности 1 пространства $S^{p^v}(V)$ имеет при некотором v одномерное инвариантное дополнение (здесь $S^k(V)$ обозначает k -ю симметрическую степень пространства V). Однако это остается недоказанным, следствием чего является резкое разделение книги на две части. Хотя обе части находятся в тесной связи, логически они независимы. Одну составляют главы 1, 2, 4 и 5, которые по существу относятся только к характеристике 0 и дают конструкцию схемы модулей кривых над полем $\mathbf{Q}$. В другую входят главы 3, 6 и 7, имеющие дело с арифметическим случаем, т. е. со схемами над $\text{Spec}(\mathbf{Z})$, и содержащие конструкцию схем модулей кривых над $\mathbf{Z}$. Что касается содержания, то главы 1, 2, 3 и 4 посвящены задачам, относящимся к пространствам орбит, в то время как в главах 5, 6 и 7 рассматриваются модули.

Книга написана целиком на языке схем. Конечно, для большей части приложений результаты можно было бы сформулировать и доказать на классическом языке. Мне кажется, однако, что в алгебраической геометрии лишь язык схем удовлетворяет существенному требованию всей современной математики: формулировать определения и теоремы на таком естественном для них абстрактном и формальном языке, чтобы их можно было рассматривать, не обращаясь к геометрической интуиции. Кроме того, мне кажется неправильным думать, что при этом геометрическая интуиция теряется полностью: так, например, подлежащие многообразия алгебраических схем можно представлять по-новому и, вероятно, лучше благодаря

понятию геометрических точек. В качестве другого примера укажем, что теория схем позволила, наконец, освободиться, и притом на весьма естественном с интуитивной точки зрения пути, от известной трудности итальянской школы: отсутствия алгебраического доказательства полноты характеристической линейной системы подходящих полных непрерывных систем на поверхности в характеристике 0 (см. [16], [24]).

Мне доставляет удовольствие отметить огромную помощь и поддержку, полученные мною от О. Зарисского, Д. Тейта и А. Гротендика. Помимо этого я хотел бы отдать должное многим математикам, у которых я что-либо почерпнул. Эта книга является, главным образом, оригинальной монографией и лишь во вторую очередь обзором, так что я чувствовал себя свободным в вопросе о включении результатов, имеющих отношение к предмету. Особенно много заимствовал я у Гротендика, Гильберта и Нагаты. Все перечислить невозможно, и я приведу лишь частичный список.

Главами 1 и 2 я в значительной степени обязан Гильберту [9],

теория, изложенная в § 1.2, развивалась независимо К. Шевалле, И. Ивахори и М. Нагатой, значительную часть § 2.2 составляет теория Ж. Титса,

результаты главы 3 получены Д. Тейтом и мною, § 4.3 содержит пример М. Нагаты [28], в § 4.5 излагается теорема Б. Костанта.

Подход к модулям на основании функторов в гл. 5 и 7 принадлежит А. Гротендику.

Изложение в § 5.3 и 5.4 следует его предложениям.

Глава 6 «Абелевы схемы» посвящена почти целиком его исследованиям ¹⁾.

Д. Мамфорд

¹⁾ Опущенная часть предисловия содержит различные библиографические замечания о неопубликованных результатах Гротендика, содержащихся в изданиях типа SGA. Теперь эти результаты имеются в доступных публикациях [11]. — *Прим. перев.*

Начнем с перечня обозначений и соглашений, которые будут использоваться в дальнейшем:

(1) Словосочетание «предсхема X/S »¹⁾ означает морфизм предсхемы X в предсхему S . Если $S = \operatorname{Spec}(R)$, то будем писать сокращенно «предсхема X/R ».

(2) S -значной точкой предсхемы X называется морфизм из S в X . Если $S = \operatorname{Spec}(R)$, то будем вместо этого говорить об « R -значной точке». Если, кроме того, R — алгебраически замкнутое поле, то будем называть такие точки «геометрическими точками» предсхемы X .

(3) Когда рассматриваются предсхемы $X/k, Y/k$, где поле k в проводимом рассуждении фиксировано, то все морфизмы $f: X \rightarrow Y$ будут предполагаться k -морфизмами. В этом случае вместо $X \times_{\operatorname{Spec}(k)} Y$ исполь-

зуется краткая запись $X \times Y$. Кроме того, если $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k , будем обозначать произведение $X \times \operatorname{Spec}(\bar{k})$ через $\bar{X}$. Если в такой ситуации схема $\bar{X}$ неприводима и приведена, то алгебраическая предсхема²⁾ X/k называется *предмногообразием*. Наконец, если задана k -рациональная точка $x \in X$, то обозначим через $\{x\}$ ее образ, рассматриваемый как приведенная подсхема в X .

(4) Если Z — замкнутая подсхема в X или цикл на X , то $\operatorname{supp}(Z)$ будет обозначать замкнутое подмножество в X , являющееся носителем схемы Z .

(5) Символы A^n и P_n обычно обозначают аффин-

¹⁾ В дальнейшем для краткости вместо «предсхема» часто пишется «схема» (наряду с употреблением этого термина в более узком смысле), когда из контекста ясно, о предсхеме или собственно схеме идет речь. — *Прим. перев.*

²⁾ То есть схема конечного типа над $\operatorname{Spec}(k)$.

ное n -мерное пространство и проективное n -мерное пространство над $\mathbf{Z}$ (т. е. $\text{Proj } \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n]$). В тех случаях, когда в какой-либо главе все рассмотрения проходят над основным полем k , эти же символы будут обозначать аффинное n -мерное пространство и проективное n -мерное пространство над k . Группа $\mathbf{PGL}(n)$ — это проективная группа, действующая на $\mathbf{P}_n$, группа $\mathbf{GL}(n)$ — общая линейная группа, действующая на $\mathbf{A}^n$, и $\mathbf{G}_m = \mathbf{GL}(1)$. Относительно базисных схем этих групповых схем делаются те же предположения, что и выше.

(6) Через 1_X обозначим тождественный морфизм из X в X . Отображения p_1 и p_2 будут проекциями произведения $X \times_S Y$ на X и Y , отображения p_{12} и т. д. будут проекциями произведения $X \times_S Y \times_S Z$ на $X \times_S Y$ и т. д. Если $f: X_1 \rightarrow X_2$ и $g: Y_1 \rightarrow Y_2$ — некоторые S -морфизмы, то $f \times_S g: X_1 \times_S Y_1 \rightarrow X_2 \times_S Y_2$ — их произведение. Если $f: X \rightarrow Y_1$ и $g: X \rightarrow Y_2$ суть S -морфизмы, то $(f, g): X \rightarrow Y_1 \times_S Y_2$ — индуцированный S -морфизм.

(7) Когда X — предсхема и $x \in X$, обозначим через $\kappa(x)$ поле вычетов локального кольца $\mathcal{O}_{x, X}$. Если X — схема над полем k , обозначим через X_k множество таких точек $x \in X$, что $k \simeq \kappa(x)^1$.

§ 1. Определения

Определение 0.1. Групповая предсхема G/S — это морфизм предсхем $\pi: G \rightarrow S$ плюс S -морфизмы $\mu: G \times_S G \rightarrow G$, $\beta: G \rightarrow G$, $e: S \rightarrow G$, удовлетворяющие обычным условиям:

¹⁾ Помимо этого, автор пользуется, как правило без объяснений, следующими стандартными обозначениями: $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок схемы X , $\Gamma(X, F)$ или $H^0(X, F)$ — группа сечений пучка F , $f^*(\cdot)$ — обратный образ пучка или морфизма пучков, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ — стандартный обратимый пучок на проективном пространстве $\mathbf{P}$, $\text{Pic}(X)$ — группа Пикара обратимых пучков схемы X , X_{red} — приведенная схема, канонически сопоставляемая схеме X . — Прим. перев.

а) Ассоциативность: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S G & \xrightarrow{1_G \times \mu} & G \times_S G \\ \downarrow \mu \times 1_G & & \downarrow \mu \\ G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

коммутативна.

б) Свойство обратного элемента: обе композиции

$$G \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \xrightleftharpoons[\beta \times 1_G]{1_G \times \beta} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$$

равны $e \circ \pi$ (здесь Δ — диагональ).

с) Свойство единицы: обе композиции

$$\begin{array}{ccccc} & & S \times_S G & \xrightarrow{e \times 1_G} & G \times_S G \xrightarrow{\mu} G \\ & \cong & \searrow & & \\ G & & & & \\ & \cong & G \times_S S & \xrightarrow{1_G \times e} & \\ & & \nearrow & & \end{array}$$

равны 1_G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Алгебраическая группа G над полем k — это групповая предсхема G/k , являющаяся алгебраической схемой, гладкой над k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. Групповая предсхема G/S действует на предсхеме X/S , если задан такой S -морфизм $\sigma: G \times_S X \rightarrow X$, что:

а) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G \times_S X & \xrightarrow{1_G \times \sigma} & G \times_S X \\ \downarrow \mu \times 1_X & & \downarrow \sigma \\ G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

коммутативна (здесь μ — групповой закон на G).

б) Композиция

$$X \cong S \times_S X \xrightarrow{e \times 1_X} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$$

равна 1_X (здесь e — единичный морфизм групповой предсхемы G).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4. Пусть $f: T \rightarrow X$ есть T -значная точка предсхемы X . Морфизм $\sigma \circ (1_G \times f)$ отображает тогда предсхему $G \times_S T$ в предсхему X . Определим морфизм

$$\psi_f^G: G \times_S T \rightarrow X \times_S T$$

формулой $\psi_f^G = (\sigma \circ (1_G \times f), p_2)$. Если не возникает недоразумений, то будем сокращать обозначение ψ_f^G до ψ_f . Когда $f = 1_X$, морфизм ψ_f будет обозначаться через Ψ и будет в этом случае просто отображением

$$(\sigma, p_2): G \times_S X \rightarrow X \times_S X.$$

Образ морфизма ψ_f обозначим через $O(f)$ и назовем *орбитой* точки f . Заметим теперь, что произведение $X \times_S T$, рассматриваемое как схема над T , имеет каноническое сечение, именно $(f, 1_T)$. Используя это, введем расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} S(f) & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow (f, 1_T) \\ G \times_S T & \xrightarrow{\psi_f} & X \times_S T \end{array}$$

определяющее предсхему $S(f)$. Предсхема $G \times_S T$ является, конечно, групповой предсхемой над T , и нетрудно показать, что $S(f)$ — подгрупповая предсхема над T . Она называется *стационарной подгруппой* точки f .

В случае когда $T = \operatorname{Spec}(k)$ и f — замкнутое вложение точки $x \in X$ в предсхему X , будем вместо $O(f)$ писать $O(x)$, а вместо $S(f)$ писать $S(x)$. Когда $T = \operatorname{Spec}(\Omega)$ и поле Ω алгебраически замкнуто, f будет геометрической точкой предсхемы X ; для обо-

значения последних будут использоваться обычно буквы x, y и т. д. Отметим, что тогда $O(x)$ — подмножество в $\bar{X}$ и $S(x)$ — подгрупповая предсхема в $\bar{G}$, где $\bar{X}, \bar{G}$ — геометрические слои соответственно предсхем X, G над геометрической точкой предсхемы S , отвечающей морфизму f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5. Пусть задано действие σ групповой предсхемы G/S на предсхеме X/S . Пара (Y, ϕ) , состоящая из предсхемы Y/S и S -морфизма $\phi: X \rightarrow Y$, называется *категорным фактором* (предсхемы X по группе G), если

i) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

коммутативна,

ii) для любой пары (Z, ψ) , состоящей из предсхемы Z над S и такого S -морфизма $\psi: X \rightarrow Z$, что $\psi \circ \sigma = \psi \circ p_2$ (иными словами, свойство i) выполняется для Z и ψ), существует единственный S -морфизм $\chi: Y \rightarrow Z$, для которого $\psi = \chi \circ \phi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.6. Пусть задано действие σ групповой предсхемы G/S на предсхеме X/S . Пара (Y, ϕ) , состоящая из предсхемы Y над S и S -морфизма $\phi: X \rightarrow Y$, называется *геометрическим фактором* (предсхемы X по группе G), если

i) $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$ (как в определении 0.5),

ii) морфизм ϕ сюръективен и образ морфизма Ψ равен $X \times_Y X$ (см. определение 0.4). Это эквивалентно

тому, что геометрические слои морфизма ϕ являются в точности орбитами геометрических точек из X , отвечающих алгебраически замкнутому полю достаточно большой степени трансцендентности¹⁾.

¹⁾ Если предсхемы G и X имеют конечный тип над S и Y соответственно, то это верно для любого алгебраически замкнутого поля.

iii) морфизм ϕ универсально субмерсивен¹⁾, т. е. для любого расширения базы $Y' \rightarrow Y$ подмножество $U' \subset Y'$ открыто в том и только том случае, когда множество $\phi'^{-1}(U')$ открыто в X' , где $X' = X \times_Y Y'$ и

$\phi': X' \rightarrow Y'$ — морфизм, индуцированный морфизмом ϕ .

iv) структурный пучок $\mathcal{O}_Y$ является подпучком пучка $\phi_*(\mathcal{O}_X)$, образованным инвариантными функциями, т. е. если $f \in \Gamma(U, \phi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$, то $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ в том и только том случае, когда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \phi^{-1}(U) \\ \downarrow p_2 & & \downarrow F \\ \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & \mathbf{A}^1 \end{array}$$

коммутативна (здесь F — морфизм, определенный функцией f).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.7. Пусть задано действие σ групповой предсхемы G/S на предсхеме X/S . Пара (Y, ϕ) , такая же как и выше, называется *универсальным категорным фактором* (соответственно *универсальным геометрическим фактором*), если для всех морфизмов $Y' \rightarrow Y$ пара (Y', ϕ') , где $X' = X \times_Y Y'$ и $\phi': X' \rightarrow Y'$ —

проекция p_2 , является категорным (соответственно геометрическим) фактором предсхемы X' по группе G .

§ 2. Первые свойства

Приведенные выше определения являются для дальнейшего основными. Сейчас мы установим первые свойства введенных нами понятий.

¹⁾ На первый взгляд кажется, что понятие «универсально субмерсивный морфизм» сложнее, чем просто «субмерсивный». Оно является, однако, более «топологическим» понятием, аналогично тому как понятие «собственный морфизм» более топологическое, чем «замкнутый». В этом определении я преследовал цель добиться самых сильных свойств, которые, по-видимому, выполняются в любой характеристике, когда мы образуем факторы по хорошим действиям группы $\mathrm{PGL}(n)$. (Принятый здесь перевод английского термина «submersive» объясняется как отсутствием подходящего русского эквивалента, так и незначительной его ролью в дальнейшем. — Перев.)

Предложение 0.1. Пусть σ — действие групповой предсхемы G/S на предсхеме X/S , и предположим, что (Y, ϕ) — геометрический фактор предсхемы X по G . Тогда (Y, ϕ) является категорным фактором предсхемы X по G и, следовательно, определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, если (Y, ϕ) — универсальный геометрический фактор, то пара (Y, ϕ) является также универсальным категорным фактором.

Доказательство. Допустим, что $\psi: X \rightarrow Z$ — произвольный S -морфизм, такой, что равенство $\psi \circ \sigma = \psi \circ p_2$ выполняется для морфизмов из $G \times_S X$ в Z .

Чтобы построить отображение $\chi: Y \rightarrow Z$, выберем произвольное аффинное открытое покрытие $\{V_i\}$ предсхемы Z . Для каждого i тогда $\psi^{-1}(V_i)$ будет инвариантным открытым подмножеством в X , откуда в силу условия ii) определения 0.6 вытекает, что $\psi^{-1}(V_i) = \phi^{-1}(U_i)$ для некоторого подмножества U_i в Y^1 . Но ввиду условия iii) определения 0.6 множество U_i непременно открыто.

Из сюръективности морфизма ϕ получаем теперь, что $\{U_i\}$ — открытое покрытие предсхемы Y и любой морфизм $\chi: Y \rightarrow Z$, для которого $\psi = \chi \circ \phi$, должен удовлетворять условию $\chi(U_i) \subset V_i$. Таким образом, можно построить семейство гомоморфизмов h_i , для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{h_i} & \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y) \\ \downarrow \psi^* & & \downarrow \phi^* \\ \Gamma(\psi^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X) & = & \Gamma(\phi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Из условия iv) определения 0.6 следует инъективность отображения ϕ^* , так что морфизмы h_i определены однозначно, если они вообще существуют. Таким образом, может существовать не более одного ото-

¹⁾ В самом деле, используя условие ii), легко показать, что для любых двух точек x, y из X равенство $\phi(x) = \phi(y)$ влечет за собой $\psi(x) = \psi(y)$.

бражения χ . Но сразу же проверяется, что для всех $g \in \Gamma(V_i, o_Z)$ функция $\psi^*(g)$ является *инвариантным* элементом кольца $\Gamma(\phi^{-1}(U_i), o_X)$ в смысле условия iv). Следовательно, она принадлежит подкольцу $\phi^*[\Gamma(U_i, o_Y)]$ и искомые гомоморфизмы h_i существуют.

Построенные отображения h_i определяют морфизмы $\chi_i: U_i \rightarrow V_i$. Осталось лишь проверить, что на пересечениях $U_i \cap U_j$ выполняются равенства $\chi_i = \chi_j$, но это очевидно. Тем самым морфизм χ построен. $\square$

В оставшейся части этого параграфа мы сделаем ряд неформальных замечаний, относящихся к различным свойствам факторов. Далее мы фиксируем обозначения S, G, X, Y, σ, ϕ из определений 0.5, 0.6 и 0.7.

(1) Предсхема S не играет существенной роли ни в одном из этих определений. Например, можно заменить при желании S на Y , а группу G — на Y -групповую предсхему $G \times_S Y$.

(2) Предположим, что (Y, ϕ) — категорный фактор предсхемы X по G . Тогда легко проверить, используя свойства универсальных отображений, следующие импликации:

X приведена	$\Rightarrow Y$ приведена
X связна	$\Rightarrow Y$ связна
X неприводима	$\Rightarrow Y$ неприводима
X локально целостна	$\Rightarrow Y$ локально целостна
X локально целостна и нормальна	$\Rightarrow Y$ локально целостна и нормальна

С другой стороны, неверно, что если X — нётерова предсхема, то предсхема Y всегда нётерова или хотя бы локально нётерова (это аналог четырнадцатой проблемы Гильберта). Мне известен в связи с этим лишь следующий результат: если $S = \text{Spec}(k)$, k — поле, X — нормальная алгебраическая схема над k и (Y, ϕ) — геометрический фактор, то Y является алгебраической схемой над k . Так как это не будет использоваться в дальнейшем, я опускаю доказательство.

(3) Допустим, что (Y, ϕ) — универсальный категорный фактор. Применяя это предположение к расширениям базы, получаемым из вложений открытых подмножеств U в предсхему Y , выводим условие iv) определения 0.6, а применяя его к вложению отдельной точки y в предсхему Y и учитывая, что категорный фактор пустой схемы по любой группе является пустой схемой, получаем, что морфизм ϕ сюръективен. Таким образом, чтобы пара (Y, ϕ) была универсальным геометрическим фактором, необходимо и достаточно, чтобы 1) морфизм ϕ был универсально субмерсивен и 2) образ отображения Ψ равнялся $X \times_Y X$.

(4) В этом замечании будем предполагать, что все схемы нётеровы, все морфизмы конечного типа, а базисная схема S даже *нормальна*. Весьма полезным является предположение о том, что групповая схема G универсально открыта над S . В силу критерия Шевалле (EGA 4, 14.4¹⁾) это эквивалентно тому, что либо схема G открыта над S , либо все групповые схемы, являющиеся слоями группы G над S , имеют одинаковую размерность. Отсюда, например, следует, что если (Y, ϕ) — геометрический фактор схемы X по группе G , то отображение ϕ будет универсально открытым.

Чтобы убедиться в том, что морфизм ϕ открыт, возьмем какое-нибудь открытое множество $U \subset X$. Поскольку схема G универсально открыта над S , проекция $p_2: G \times_S X \rightarrow X$ открыта. Морфизм σ представляется в виде

$$G \times_S X \xrightarrow{(p_1, \sigma)} G \times_S X \xrightarrow{p_2} X,$$

где (p_1, σ) — изоморфизм. Следовательно, он открыт. В частности, $\sigma(G \times_S U) = U'$ — открытое множество.

¹⁾ Сокращение SGA относится к книге [11], стоящее за ним число является номером цитируемого доклада. Аналогично сокращение EGA относится к [10], а число означает номер соответствующей главы.

Но $\phi(U) = \phi(U')$, и так как $\phi(U')$ — подмножество в X , инвариантное относительно G , то $U' = \phi^{-1}(\phi(U'))$. В силу субмерсивности отображения ϕ это доказывает, что множество $\phi(U')$ и, следовательно, $\phi(U)$ открыто. Аналогичные рассуждения показывают, что морфизм ϕ даже универсально открыт.

Другое следствие относится к размерности. Пусть $\phi: X \rightarrow Y$ — такой доминантный S -морфизм, что

$$i) \quad \phi \circ \sigma = \phi \circ p_2,$$

ii) для любого алгебраически замкнутого поля k его геометрические слои над k содержат не более одной орбиты относительно группы $\bar{G} = G \times_S \operatorname{Spec}(k)$.

Для всех $x \in X$ положим

$\sigma(x) =$ (размерность стационарной подгруппы точки x),

$\tau(x) =$ (размерность слоя $\phi^{-1}(\phi(x))$ в точке x).

Из стандартных теорем о полунепрерывности сверху размерности (примененных к стационарной подгруппе $S(1_x)$ над S и морфизму ϕ) вытекает, что функции σ и τ полунепрерывны сверху (см. EGA 4, 13.1). Если, с другой стороны, g — размерность групповых схем, являющихся слоями группы G над S , то в силу ii) для всех x

$$\sigma(x) + \tau(x) = g.$$

Таким образом, обе функции σ и τ постоянны на каждой топологической компоненте схемы X .

Используя это замечание, мы получим важный критерий:

Предложение 0.2. *Предположим, что X и Y — неприводимые нормальные нётеровы предсхемы над S , а $\phi: X \rightarrow Y$ — доминантный S -морфизм конечного типа. Будем считать, что поле вычетов общей точки предсхемы Y имеет характеристику нуль. Пусть групповая предсхема G , конечного типа и универсально*

открытая над S , действует на X с помощью отображения $\sigma: G \times_S X \rightarrow X$. Тогда если

$$i) \phi \circ \sigma = \phi \circ p_2,$$

ii) для любого алгебраически замкнутого поля k геометрические слои над k морфизма ϕ содержат не более одной орбиты относительно $\bar{G} = G \times_S \operatorname{Spec}(k)$,

то морфизм ϕ универсально открыт, а пара $(\phi X, \phi)$ является геометрическим фактором предсхемы X по группе G .

Доказательство. Прежде всего, поскольку группа G универсально открыта над S , все групповые схемы $\bar{G}$ имеют одинаковую размерность. Из условия ii) вытекает, следовательно, что компоненты всех геометрических слоев морфизма ϕ имеют одну и ту же размерность. В силу критерия Шевалле морфизм ϕ универсально открыт. Для доказательства второго утверждения нам нужно лишь проверить условие iv) определения 0.6. Для этого возьмем открытое множество $U \subset \phi(X)$. Так как отображение ϕ доминантно и предсхема Y приведена, ясно, что

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \hookrightarrow \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X).$$

Пусть теперь f — инвариантное сечение пучка $\mathcal{O}_X$ над множеством $\phi^{-1}(U)$: нам необходимо показать, что f является сечением пучка $\mathcal{O}_Y$. Сечение f определяет морфизм

$$F: \phi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{A}^1.$$

Пусть U' — приведенная и неприводимая подсхема в $\mathbb{A}^1 \times U$, носитель которой равен замыканию множества $(F, \phi)[\phi^{-1}(U)]$ (см. рис. 1). Я утверждаю, что проекция $\bar{\omega}$ схемы U' в схему U является изоморфизмом. Из этого следует тогда, что морфизм F пропускается через U , а это и требуется показать. Заметим, прежде всего, что морфизм $\bar{\omega}$ геометрически инъективен, если его ограничить на образ множества $\phi^{-1}(U)$ в подсхеме U' (этот образ является плотным конструктивным подмножеством). Это происходит по-

тому, что каждый геометрический слой морфизма ϕ содержит ровно одну орбиту и инвариантная функция F не может разбивать эти слои¹⁾. В частности, морфизм $\bar{\omega}$ бирационален, ибо характеристика в общей точке равна нулю. Образует, далее, расслоенное

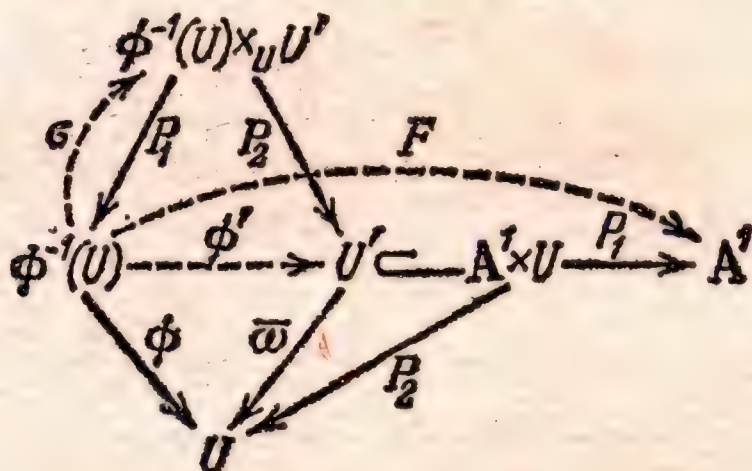


Рис. 1.

произведение $\phi^{-1}(U) \times_U U'$ (см. рис. 1). Так как $\bar{\omega}$ — отделимый морфизм, проекция $p_1: \phi^{-1}(U) \times_U U' \rightarrow \phi^{-1}(U)$ отделима. Морфизм ϕ' , отображающий множество $\phi^{-1}(U)$ в U' , индуцирует сечение σ проекции p_1 , образ $\sigma[\phi^{-1}(U)]$ которого замкнут в силу EGA 1, 5.4.6. Но проекция $p_2: \phi^{-1}(U) \times_U U' \rightarrow U'$ получается из морфизма ϕ заменой базы. Следовательно, она открыта и, в частности, открыто множество

$$p_2\{\phi^{-1}(U) \times_U U' - \sigma[\phi^{-1}(U)]\}$$

в U' . Но геометрические точки y' этого множества — это в точности те точки, для которых можно найти такую геометрическую точку x из $\phi^{-1}(U)$, что (a) $\phi'(x) \neq y'$, (b) $\phi(x) = \bar{\omega}(y')$. В силу нашего первого замечания все геометрические точки $\tilde{x}$ из $\phi^{-1}(U)$, для которых $\phi(\tilde{x}) = \bar{\omega}(y')$, переводятся морфизмом ϕ'

¹⁾ Здесь имеется в виду разбиение слоя на множества, в которых функция F принимает постоянное значение. — Прим. перев.

в одну и ту же геометрическую точку $\phi'(x)$ множества U' . Таким образом, точки y' не принадлежат образу отображения ϕ' , а так как этот образ плотен, то таких точек не существует. Итак, $\sigma[\phi^{-1}(U)] = \phi^{-1}(U) \times_U U'$ и морфизм ϕ' сюръективен. Мы получаем, что морфизм $\bar{\phi}$ геометрически инъективен без всяких ограничений и в силу основной теоремы Зарисского является изоморфизмом. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. (5) Следующие утверждения эквивалентны:

(а) (Y, ϕ) — универсальный категорный фактор схемы X по группе G ,

(b) для всех аффинных схем Y' и морфизмов $Y' \rightarrow Y$ пара (Y', ϕ') , где $\phi': X' \rightarrow Y'$ — замена базы, является категорным фактором схемы X' по G ,

(с) существует такое открытое аффинное покрытие $\{U_i\}$ схемы Y , что пары (U_i, ϕ_i) , где $\phi_i: \phi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ — ограничения морфизма ϕ , являются для всех i универсальными категорными факторами схем $\phi^{-1}(U_i)$ по G .

(6) В гл. 1 нам понадобится критерий, позволяющий узнать, когда пара (Y, ϕ) является категорным, но при этом, вообще говоря, не геометрическим фактором. Именно, достаточны следующие три условия:

i) $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$,

ii) пучок $\mathcal{O}_Y$ является подпучком инвариантов в $\phi_*(\mathcal{O}_X)$,

iii) если W — замкнутое инвариантное подмножество в X , то множество $\phi(W)$ замкнуто в Y ; если W_i , $i \in I$, — семейство замкнутых инвариантных подмножеств в X , то

$$\phi\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right) = \bigcap_{i \in I} \phi(W_i).$$

Более того, если эти условия выполняются, то морфизм ϕ субмерсивен.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу условия ii) морфизм ϕ доминантен. Применяя

условие iii), получаем, что он на самом деле сюръективен. Пусть теперь $\psi: X \rightarrow Z$ — произвольный S -морфизм, для которого $\psi \circ \sigma = \psi \circ p_2$. Поступим точно так же, как в доказательстве предложения 0.1: выберем открытое аффинное покрытие $\{V_i\}$ схемы Z . Как только мы покажем, что существует такое открытое покрытие $\{U_i\}$ схемы Y , что $\psi^{-1}(V_i) \supset \phi^{-1}(U_i)$, доказательство завершится так же, как и в предложении 0.1. Чтобы достичь этого, положим $W_i = X \setminus \psi^{-1}(V_i)$. Это замкнутые инвариантные подмножества в X . В силу условия iii) множества $U_i = Y \setminus \phi W_i$ открыты и, следовательно, $\phi^{-1}(U_i) \subset \psi^{-1}(V_i)$ для всех i . Множества $\{\psi^{-1}(V_i)\}$ покрывают схему X так, что $\bigcap_i W_i = \emptyset$, и в силу iii) $\bigcap_i \phi W_i = \emptyset$. Таким образом, множества U_i покрывают схему Y . Пусть, наконец, $Z \subset Y$ — любое такое подмножество, что $\phi^{-1}(Z)$ замкнуто в X . По условию i) множество $\phi^{-1}(Z)$ инвариантно. Отсюда и из условия iii) вытекает, что множество $\phi(\phi^{-1}(Z))$ замкнуто в Y . Но морфизм ϕ сюръективен, так что $Z = \phi(\phi^{-1}(Z))$. Это доказывает его субмерсивность. $\square$

(7) Предположим, что (Y, ϕ) — геометрический фактор схемы X по группе G . Отметим, что условия i), ii) и iii) определения 0.6 сохраняются при любой замене базы $Y' \rightarrow Y$. Лишь более тонкое условие iv) может при этом нарушаться (что иногда и случается). Если, однако, $Y' \rightarrow Y$ — *плоский* морфизм, то условие iv) сохраняется. Чтобы убедиться в этом, положим $\psi = \phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$. Условие iv) означает тогда, что точна последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow \phi_* (\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sigma^* - p_2^*} \psi_* (\mathcal{O}_{G \times_S X}). \quad (*)$$

Но взятие прямых образов пучков перестановочно с плоской заменой базы, т. е.

$$\begin{aligned} \phi_* (\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{Y'} &\cong \phi'_* (\mathcal{O}_{X'}), \\ \psi_* (\mathcal{O}_{G \times_S X}) \otimes \mathcal{O}_{Y'} &\cong \psi'_* (\mathcal{O}_{G \times_S X'}) \end{aligned}$$

(где $X' = X \times_Y Y'$ и т. д.), и точность последовательности сохраняется при такой замене базы. Таким образом, аналогичная последовательность $(*)'$ на Y' точна.

(8) С другой стороны, можно рассмотреть обратную задачу. Я утверждаю, что если для строго плоского и квазикompактного морфизма $Y' \rightarrow Y$ пара (Y', ϕ') , где $\phi': X' \rightarrow Y'$ — поднятый морфизм, является универсальным категорным фактором или геометрическим фактором схемы X' по группе G , то пара (Y, ϕ) будет фактором того же типа схемы X по G . Эти утверждения являются простыми следствиями общей теории спуска из SGA 8.

§ 3. Хорошие и плохие действия

Займемся теперь более тщательным изучением действия группы. Как и выше, групповая схема G/S действует на схеме X/S с помощью отображения σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.8. Говорят, что действие σ

i) *замкнуто*, если для всех геометрических точек x из X все орбиты $O(x) \subset \bar{X}$ замкнуты (здесь $\bar{X} = X \times_S \operatorname{Spec}(\Omega)$, если x — Ω -значная точка),

ii) *отделимо*, если образ морфизма

$$\Psi = (\sigma, p_2): G \times_S X \rightarrow X \times_S X$$

замкнут,

iii) *собственно*, если Ψ — собственный морфизм,

iv) *свободно*, если Ψ — замкнутое вложение.

Пусть $\mathcal{P} = S(1_X)$ — стационарная подгруппа точки $1_X: X \rightarrow X$ (см. определение 0.4). Она является подгрупповой предсхемой групповой предсхемы $G \times_S X/X$.

Пусть $\omega: \mathcal{P} \rightarrow X$ — проекция и $e_X: X \rightarrow \mathcal{P}$ — единичное сечение. Обозначим для всех $x \in X$ через $\sigma(x)$ размерность слоя $\omega^{-1}(x)$, рассматриваемого как схема

над $\operatorname{Spec} k(x)$, в точке $e_X(x)$. Если предсхема X нётерова, а группа G — конечного типа над S , то эта функция конечна и полунепрерывна сверху (см. EGA 4, 13.1 и замечание 4 § 2). В этих предположениях введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.9. $S_r(X) = \{x \in X; \sigma(x) \geq r\}$. В силу сказанного выше это замкнутые множества. Кроме того, будем говорить, что точка x *регулярна* по отношению к действию группы G , если функция σ постоянна в некоторой окрестности точки x .

Множество точек в X , регулярных по отношению к действию группы G , образует открытое множество $X^{\text{reg}} \subset X$. Когда групповая схема G — схема конечного типа и универсально открыта над S и когда существует такой геометрический фактор (Y, ϕ) схемы X по G , что схема Y нётерова, а морфизм ϕ конечного типа, то, согласно замечанию 4 § 2, каждая точка из X должна быть регулярной относительно этого действия: $X^{\text{reg}} = X$.

Полезное наблюдение состоит в том, что если группа G — конечного типа над S и $X^{\text{reg}} = X$, то действие группы замкнуто даже в том случае, когда схема X не будет схемой конечного типа над S . Чтобы доказать это, достаточно взять $S = \operatorname{Spec}(k)$, где поле k алгебраически замкнуто; можно также предположить, что группа G неприводима. Заметим, что если $x \in X_k$, то орбита $O(x)$ неприводима, и если y — ее общая точка, то $k(y)$ — подполе поля $k(G)$, поля функций на G . Нетрудно, кроме того, проверить, что ¹⁾

$$\operatorname{tr. d.} k(y)/k + \sigma(y) = \dim G.$$

Если теперь действие не замкнуто, то найдется поле k и точки $x_1, x_2 \in X_k$, для которых $O(x_2) \subset \overline{O(x_1)} \setminus O(x_1)$. Пусть y_i — общая точка орбиты $O(x_i)$. Поскольку x_2 — регулярная точка действия, то $\sigma(x_1) = \sigma(x_2)$ и потому

$$\operatorname{tr. d.} k(y_1)/k = \operatorname{tr. d.} k(y_2)/k < \infty.$$

¹⁾ $\operatorname{tr. d.}$ — степень трансцендентности. — Прим. перев.

Но точка y_2 является специализацией точки y_1 , и мы приходим к противоречию.

Среди различных условий, накладываемых на действие группы G , имеется одно полезное в некоторых случаях условие, которое занимает промежуточное положение между замкнутостью некоторой орбиты и собственностью действия в целом.

ЛЕММА 0.3. Пусть $S = \operatorname{Spec}(k)$, поле k алгебраически замкнуто, а X и G — алгебраические предсхемы над k . Рассмотрим действие σ группы G на предсхеме X и точку $x \in X_k$. Морфизм ψ_x собствен в том и только том случае, когда орбита $O(x)$ замкнута в X и стационарная подгруппа $S(x)$ собствена над k .

Доказательство. Если ψ_x — собственный морфизм, то его образ $O(x)$ должен быть замкнут, а его слой над x , равный подгруппе $S(x)$, должен быть собственным над k . Предположим, с другой стороны, что орбита $O(x)$ замкнута и подгруппа $S(x)$ собствена над k . Для доказательства собственности морфизма ψ_x можно вместо G рассматривать группу G_{red} . Пусть тогда Z — приведенная замкнутая подсхема в X с носителем $O(x)$. Предсхемы G и Z суть однородные приведенные предсхемы и, следовательно, неособые. Если рассмотреть морфизм ψ'_x как морфизм ψ_x из G в Z , то достаточно доказать собственность морфизма ψ'_x . Так как схемы G и Z неособы и компоненты всех слоев морфизма ψ_x имеют одну и ту же размерность, именно $\dim S(x)/k$, то морфизм ψ'_x является плоским (см. EGA 4, 15. 4). Таким образом, чтобы доказать собственность морфизма ψ'_x , достаточно доказать это для морфизма, полученного с помощью расширения базы ψ_x , т. е. для

$$\psi''_x = p_2: G \times_Z G \rightarrow G$$

(см. SGA 8, следствие 4.7). Ограничивая групповой закон группы G , получаем морфизм μ' из $S(x) \times G$

в G . Отображение $(\mu', p_2)_Z$ будет тогда морфизмом из $S(x) \times G$ в $G \times G$. Формальная проверка показывает, что оно является изоморфизмом. Итак, достаточно показать, что собственным будет отображение

$$\psi''_x \circ (\mu', p_2)_Z: S(x) \times G \rightarrow G.$$

Но $\psi''_x \circ (\mu', p_2)_Z$ — это вторая проекция $p_2: S(x) \times G \rightarrow G$ и ее собственность вытекает из собственности схемы $S(x)$ над полем k . $\square$

Как видно из доказательства этой леммы, производя различные манипуляции с действиями групп, можно получать весьма неочевидные следствия. Тем не менее глобальная собственность действия, т. е. собственность отображения Ψ , является более тонким свойством, чем собственность морфизма ψ_x для какой-то точки x . Приведем для иллюстрации этого пример и лемму, наводящие на противоположные заключения (этот пример разрушил чрезмерно оптимистические гипотезы, которых придерживался автор).

Пример 0.4 полупростой группы G над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, так действующей на неособой квазиаффинной схеме конечного типа над $\mathbf{C}$, что

i) все стационарные подгруппы сводятся к e , т. е. действие теоретико-множественно свободно,

ii) геометрический фактор существует и является схемой конечного типа над $\mathbf{C}$; таким образом (см. § 4), действие отделимо,

iii) действие не является собственным и, в частности, свободным (алгебро-геометрически).

Доказательство. Возьмем $G = \mathbf{SL}(2)$. Пусть V_n обозначает $(n+1)$ -мерное аффинное пространство, замкнутые точки которого суть однородные формы степени n от переменных X и Y над полем $\mathbf{C}$. Группа $\mathbf{SL}(2)$ действует тогда на V_n подстановками переменных X и Y . Определим приведенную под-

схему $X \subset V_1 \times V_4$ соотношениями

$$(F_1, F_4) \in X_c \Leftrightarrow \begin{cases} (a) F_1 \neq 0, \\ (b) F_4 \text{ является квадратом} \\ \text{однородной квадратичной} \\ \text{формы дискриминанта 1.} \end{cases}$$

Проверяется, что схема X неособа, инвариантна относительно группы $\mathbf{SL}(2)$ и что никакой нетривиальный элемент $\alpha \in \mathbf{SL}(2)_c$ не имеет неподвижных точек в X . Введем отображение $\phi: X \rightarrow \mathbf{A}^1$, полагая

$$\phi(\alpha X + \beta Y, F_4(X, Y)) = F_4(-\beta, \alpha).$$

Легко проверить, что пара $(\mathbf{A}^1, \phi)$ будет геометрическим фактором схемы X по группе $\mathbf{SL}(2)$. Наконец, морфизм Ψ даже не замкнут. Пусть Z — замкнутая подсхема в $G \times X$, замкнутыми точками которой являются пары

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \times (\lambda X + Y, X^2 Y^2)$$

с $\lambda \in \mathbf{C} \setminus (0)$. Образ такой точки относительно морфизма Ψ равен

$$(-\lambda X + Y, X^2 Y^2) \times (\lambda X + Y, X^2 Y^2).$$

В замыкании этого множества имеется еще точка $(Y, X^2 Y^2) \times (Y, X^2 Y^2)$.

Лемма 0.5. Пусть σ — действие группы $\mathbf{G}_m$ на алгебраической схеме X , все над полем k . Допустим, что имеется такое вложение схемы X в проективное пространство $\mathbf{P}_n$, что действие σ продолжается до действия группы $\mathbf{G}_m$ на $\mathbf{P}_n$. Тогда

$$\sigma \text{ собственно} \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \sigma \text{ отделимо,} \\ (ii) S_1(X) = \emptyset. \end{cases}$$

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Предположим, обратно, что действие σ отделимо и $S_1(X) = \emptyset$. Используем для доказательства собственности морфизма Ψ нормировочный критерий (EGA 2

§ 7). Пусть R — кольцо нормирования над полем k и K — его поле частных. Можно предполагать, что кольцо R содержит алгебраически замкнутое расширение Ω поля k , которое изоморфно его полю вычетов (замечание 7.3.9, EGA 2). Предположим теперь, что $\phi \times \xi$ — такая K -значная, но не R -значная точка схемы $G \times X$, что точка $\Psi(\phi \times \xi)$ является R -значной точкой схемы $X \times X$. Так как

$$\Psi(\phi \times \xi) = \sigma(\phi, \xi) \times \xi,$$

точки ξ и $\sigma(\phi, \xi)$, но не ϕ , R -значны. Пусть $\overline{\sigma(\phi, \xi)}$ и $\bar{\xi}$ суть Ω -значные точки схемы X , индуцированные вложением $\operatorname{Spec}(\Omega) \rightarrow \operatorname{Spec}(R)$. Поскольку действие σ отделимо, точка $\overline{\sigma(\phi, \xi)} \times \bar{\xi}$ принадлежит образу морфизма Ψ , и потому существует такая Ω -значная точка $\bar{\phi}_0$ схемы G , что

$$\overline{\sigma(\phi, \xi)} = \sigma(\bar{\phi}_0, \bar{\xi}).$$

Так как кольцо R содержит поле Ω , точку $\bar{\phi}_0$ можно продолжить до R -значной точки ϕ_0 схемы G . Заменяя ϕ на $\phi_0^{-1} \cdot \phi$, можно с самого начала предполагать, что точки $\sigma(\phi, \xi)$ и ξ индуцируют одну и ту же Ω -значную точку $\bar{\xi}$ схемы X (выражаясь классически: специализируются в одну геометрическую точку схемы X).

Пусть теперь $I: X \rightarrow \mathbf{P}_n$ есть G_m -линейное вложение с подходящим действием группы G_m на $\mathbf{P}_n$. Нам понадобится следующее утверждение.

(*) Если группа G_m действует на пространстве $\mathbf{P}_n$ над полем Ω , то для каждой точки $x \in \mathbf{P}_n$ найдется инвариантное аффинное пространство U , содержащее x (т. е. пространство, получаемое из $\mathbf{P}_n$ выбрасыванием гиперплоскости), и такие координаты $x_1, \dots, x_n$ на U , что действие $\sigma: G_m \times U \rightarrow U$ задается формулами

$$\sigma^*(x_i) = \alpha^{r_i} \cdot x_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

с подходящими целыми r_i (здесь группа G_m отождествлена с $\operatorname{Spec} \Omega[\alpha, \alpha^{-1}]$). Доказательство утверждения (*) можно найти в [41].

Применяя его, находим окрестность U точки $I(\bar{\xi})$, в которой действие имеет такой вид. Наряду с $I(\bar{\xi})$ точками окрестности будут $I(\xi)$ и $I(\sigma(\phi, \xi))$. В силу предположения $S_1(X) = \emptyset$ точка $I(\bar{\xi})$ не является неподвижной относительно группы G_m . Для некоторого i , следовательно, i -я координата $I(\bar{\xi})_i$ не равна нулю и $r_i \neq 0$. Отображение ϕ — это морфизм

$$\operatorname{Spec} K \rightarrow G_m = \operatorname{Spec} k[\alpha, \alpha^{-1}].$$

Предположим, что функция α на группе G_m индуцирует $A \in K$. Тогда i -е координаты точек $I(\xi)$ и $I(\sigma(\phi, \xi)) = \sigma(\phi, I(\xi))$ связаны соотношением

$$I(\sigma(\phi, \xi))_i = A^{r_i} \cdot I(\xi)_i.$$

Координаты $I(\xi)_i$ и $I(\sigma(\phi, \xi))_i$ будут элементами кольца R , редукции которых в его поле вычетов обе равны $I(\bar{\xi})_i$. Поскольку $r_i \neq 0$, находим, что элемент A должен быть единицей кольца R . Но тогда морфизм ϕ пропускается через $\operatorname{Spec} R$, являясь тем самым R -значной точкой группы G_m . $\square$

§ 4. Дальнейшие свойства

В этом разделе мы будем изучать связь между свойствами действия σ групповой предсхемы G/S на X/S и свойствами его геометрического фактора (Y, ϕ) в предположении, что он существует. Фиксируем эти обозначения на протяжении всего параграфа.

ЛЕММА. 0.6. *Если геометрический фактор (Y, ϕ) существует, то действие σ замкнуто. В этой ситуации предсхема Y будет схемой над S тогда и только тогда, когда действие σ отделимо.*

Доказательство. Пусть x — геометрическая точка схемы X над алгебраически замкнутым полем Ω . Если $\bar{X} = X \times_S \operatorname{Spec}(\Omega)$, $\bar{Y} = Y \times_S \operatorname{Spec}(\Omega)$ и

отображение $\bar{\phi}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ индуцировано морфизмом ϕ , то

$$O(x) = \bar{\phi}^{-1} \bar{\phi}((x)).$$

Орбита $O(x)$ замкнута, поскольку отображение $\bar{\phi}$ непрерывно и Ω -рациональная точка (например, $\bar{\phi}(x)$) любой предсхемы над полем Ω будет замкнутой точкой.

Так как (Y, ϕ) — геометрический фактор, образ схемы $G \times_S X$ в $X \times_S X$ относительно морфизма Ψ равен в точности $X \times_Y X$. Но мы имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \rightarrow & X \times_S X \\ \downarrow \phi \circ p_i & & \downarrow \phi \times \phi \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times_S Y \end{array}$$

в которой Δ — диагональный морфизм. Эта диаграмма превращает схему $X \times_Y X$ в расслоенное произведение Y и $X \times_S X$ над $Y \times_S Y$. Кроме того, из универсальной субмерсивности морфизма ϕ следует, что отображение $\phi \times \phi$ субмерсивно. Таким образом, справедливы эквивалентности

$$[\Delta(Y) \text{ замкнуто в } Y \times_S Y] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(\phi \times \phi)^{-1}(\Delta(Y)) \text{ замкнуто в } X \times_S X] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [X \times_Y X \text{ замкнуто в } X \times_S X].$$

Это доказывает, что Y является S -схемой в том и только в том случае, когда действие σ отделимо. $\square$

Более тонким является

Предложение 0.7. Пусть $S = \operatorname{Spec}(k)$, k — поле и G , X и Y — алгебраические схемы над k . Предположим, что группа G аффинна, а действие σ собственно. Тогда ϕ — аффинный морфизм.

Доказательство. Чтобы получить это, предположим сначала, что морфизм ϕ имеет сечение $s: Y \rightarrow X$. Рассмотрим затем следующую диаграмму, верхний треугольник которой получается из нижнего заменой базы s :

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times Y & \xrightarrow{\tau} & X & & \\
 \downarrow 1_G \times s & \searrow p_2 & \swarrow \phi & & \downarrow (1_X, s \circ \phi) \\
 & Y & & & \\
 G \times X & \xrightarrow{\psi} & X \times_Y X & & \\
 \searrow p_2 & \downarrow s & \swarrow p_2 & & \\
 & X & & &
 \end{array}$$

Поскольку действие σ собственнo, ψ — собственный морфизм. Следовательно, собственным является и морфизм τ . Из аффинности группы G вытекает, что p_2 — аффинный морфизм, и в силу теоремы Шевалле (EGA 2, теорема 6.7.1) из всего этого следует, что морфизм ϕ аффинен.

Хотелось бы, делая замену базы $\pi: Y' \rightarrow Y$, свести общий случай к случаю, когда ϕ имеет сечение. Допустим, что после такой замены базы новый морфизм $\phi': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ аффинен. В некоторых случаях

это позволяет заключить, что ϕ — также аффинный морфизм. Это так, снова по теореме Шевалле, когда отображение π конечно и сюръективно. Кроме того, это верно, когда $\{U_i\}$ — открытое покрытие схемы Y и $\pi: \bigcup_i U_i \rightarrow Y$ — вложение, ибо аффинность морфизма

является свойством, локальным по Y . Итак, ввиду замечания 4 § 2 предложение получается из следующей леммы:

Лемма. Пусть $\phi: X \rightarrow Y$ — универсально открытый сюръективный морфизм конечного типа алгебраических схем. Тогда существует замена базы

$\pi: Y' \rightarrow Y$, в которой π — композиция

i) конечных сюръективных морфизмов
и

ii) объединений вложений $\bigcup U_i \rightarrow Y$, где $\{U_i\}$ — открытое покрытие схемы Y ,

и после которой поднятый морфизм $\phi': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ приобретает сечение.

Доказательство. В качестве первого расширения базы выберем канонический морфизм $\pi_1: Y_1 \rightarrow Y$ нормализации схемы Y_{red} в Y . Пусть $X_1 = X \times_Y Y_1$ и $\phi_1: X_1 \rightarrow Y_1$ — поднятый морфизм. Так как морфизм ϕ открыт, образ каждой компоненты схемы X_1 будет компонентой схемы Y_1 и слои отображения ϕ_1 над этой компонентой будут иметь одинаковую размерность (см. EGA 4,14.2). Возьмем теперь для каждой замкнутой точки $y \in Y_1$ замкнутую точку x схемы X_1 , лежащую над y . Прежде всего существует такая приведенная и неприводимая замкнутая подсхема $H \subset X_1$, что

i) $\dim H = \dim Y_1$,

ii) x — изолированная точка в $H \cap \phi_1^{-1}(y)$.

Поскольку слои морфизма ϕ_1 имеют одинаковую размерность, такую подсхему можно построить, например, как множество нулей таких функций $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{x, X_1}$, что $n = \dim_x \phi_1^{-1}(y)$ и образы f_i в кольце $\mathcal{O}_{x, \phi_1^{-1}(y)}$ порождают идеал, примарный относительно некоторого максимального идеала. Поле функций $k(H)$ будет тогда конечным алгебраическим расширением поля $k(Y_1)$ (или поля $k(Y_y)$, где Y_y — компонента схемы Y_1 , содержащая точку y). Пусть $L \supset k(H)$ — конечное алгебраическое расширение, которое чисто несепарабельно над некоторым нормальным расширением поля $k(Y_1)$. Пусть Y' — нормализация схемы Y_1 (или ее компоненты, содержащей точку y) в поле L . Я утверждаю, что схема $X_1 \times_{Y_1} Y'$ имеет локально в окрестности каждой точки $y' \in Y'$,

лежащей над точкой $y \in Y$, сечение над схемой Y' . Так как все точки y' , лежащие над точкой y , сопряжены, достаточно это доказать для одной такой точки. Рассмотрим теперь рациональное отображение $Y' \rightarrow H$, индуцированное вложением $L \supset k(H)$. Я утверждаю, что оно является морфизмом в некоторой окрестности U' какой-то точки y' (над y). Композиция этого морфизма с вложением схемы H в X_1 определит тогда сечение схемы $X_1 \times_{Y_1} Y'$ над схемой U' .

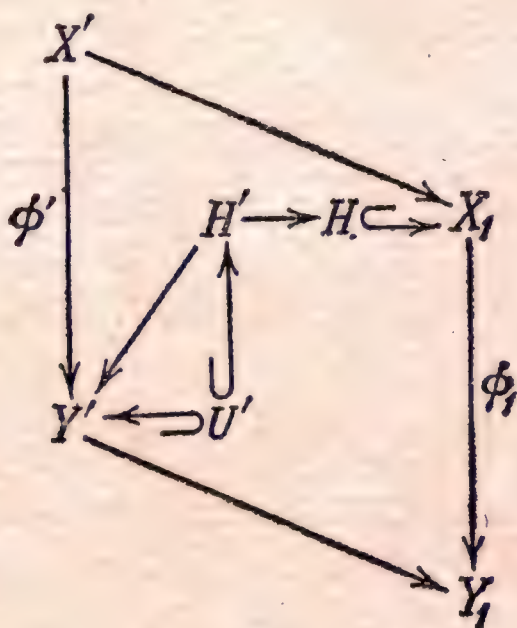


Рис. 2.

Обозначим через H' нормализацию схемы H в поле L . Поскольку $H \rightarrow Y_1$ — морфизм, бирациональное отображение нормализаций $H' \rightarrow Y'$ также является морфизмом. Пусть x' — точка схемы H' , лежащая над точкой $x \in H$. Так как точка x изолирована в слое морфизма $H \rightarrow Y_1$ (условие ii)), то получаем, что точка x' изолирована в слое морфизма $H' \rightarrow Y'$. В силу основной теоремы Зарисского открытое множество, содержащее точку x' , изоморфно, следовательно, своему образу $U' \subset Y'$. Рациональное отображение из Y' в H должно быть на этом множестве U' морфизмом. Этим доказано, что схема $X_1 \times_{Y_1} Y'$

имеет сечения над схемой Y' в окрестности каждой точки $y' \in Y'$, лежащей над точкой $y \in Y_1$ (см. рис. 2).

Существует, следовательно, открытое множество $U_y \subset Y_1$, содержащее точку y и такое, что, если

V_y — его прообраз в схеме Y' , то схема $X_1 \times_{Y_1} V_y$ имеет сечения над каждой точкой множества V_y . Заменяем теперь схему Y_1 с помощью открытого покрытия множествами U_y . Результат обозначим через Y_2 . Перейдем затем к соответствующему набору множеств V_y , лежащих над U_y . Получим схему Y_3 , конечную над Y_2 . Наконец, заменим схему Y_3 на открытое покрытие Y_4 так, чтобы в каждой его компоненте было определено глобальное сечение схемы $X_1 \times_{Y_1} Y_4$ над Y_4 . $\square$

Используя более сложную технику, этот результат можно обобщить на широкий класс базисных схем S . Мы опускаем это. Для дальнейшего интереснее, что, применяя методы глав 1 и 2, можно в одном случае доказать обращение предложения 0.7.

Предложение 0.8. Пусть $S = \operatorname{Spec}(k)$, k — поле и G , X и Y — алгебраические схемы над k . Предположим, что G — редуктивная алгебраическая группа и стационарные подгруппы геометрических точек схемы X относительно действия группы G конечны. Тогда из аффинности морфизма ϕ следует, что действие σ существенно.

Доказательство. Поскольку $\Psi: G \times X \rightarrow X \times X$ есть Y -морфизм, достаточно показать, что он — собственный морфизм над каждым открытым множеством U_i некоторого открытого аффинного покрытия $\{U_i\}$ схемы Y . Итак, предположим, что схема Y аффинна. Тогда будет аффинной схема X и по определению 1.7

$$X = X_{(0)}^s(o_X).$$

В силу следствия 2.5 группа G действует на X существенно. $\square$

Собирая эти результаты вместе, получаем, что если группа G редуктивна и стационарные подгруппы конечны, то условие, что морфизм ϕ аффинен, является, по сути дела, слабым топологическим ограничением,

поскольку оно эквивалентно собственности действия σ . Если, однако, стационарные подгруппы имеют положительную размерность, то это условие будет гораздо более сильным ограничением. Из него следует, по крайней мере в характеристике 0, что стационарные подгруппы редуктивны (см. [3]).

Последний «предварительный» результат служит еще одной мотивировкой понятия геометрического фактора. Он показывает, что в случае свободного действия это понятие обладает всеми свойствами, на которые только можно надеяться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.10. Пусть (Y, ϕ) — геометрический фактор схемы X по группе G (над S). Предположим, что группа G — плоская и конечного типа над S . Схема X называется *главным расслоенным пространством* над схемой Y с группой G , если

- i) ϕ — плоский морфизм конечного типа,
- ii) ψ — изоморфизм схем $G \times_S X$ и $X \times_Y X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.9. Пусть $S = \operatorname{Spec}(k)$, k — поле и G — алгебраическая группа. Предположим, что X и Y — алгебраические схемы над k . Если действие σ свободно и (Y, ϕ) — геометрический фактор схемы X по G , то схема X является *главным расслоенным пространством* над Y с группой G ¹⁾.

Доказательство. Во-первых, можно считать, что поле k алгебраически замкнуто. Причиной этого служит то, что при соответствующей замене базы i) действие σ остается свободным, ii) пара (Y, ϕ) остается геометрическим фактором (замечание 7, § 2), iii) свойство быть главным расслоенным пространством удовлетворяет условиям спуска (SGA 8, 5.4). Во-вторых, поскольку все условия определения 0.10 носят локальный характер, схему Y можно заменить одним из ее локальных колец $\operatorname{Spec}(O_{y,Y})$, где $y \in Y$ — замкнутая точка. И, в-третьих, схема $\operatorname{Spec}(O_{y,Y})$ заменяется на

¹⁾ Весьма правдоподобно, что этот результат выполняется, если даже не предполагать а priori, что Y — алгебраическая схема. Последнее получается тогда а posteriori.

пополнение $\text{Spec}(\hat{o}_{y,Y})$. Произведенные замены также суть строго плоские квазикомпактные замены базы и, как и прежде, i) действие σ остается свободным, ii) (Y, ϕ) остается геометрическим фактором и iii) к свойству быть главным расслоенным пространством можно применить спуск.

Итак, мы имеем $Y = \text{Spec}(A)$, где A — полное локальное кольцо с алгебраически замкнутым полем вычетов. Пусть y — замкнутая точка схемы Y , а x — замкнутая и потому k -рациональная точка схемы X , лежащая над y . Обозначим через $I_x \subset o_{x,X}$ идеал, определяющий орбиту $O(x)$ точки x . Из свободности действия получаем, что ψ_x приводит к изоморфизму

$$o_{x,X}/I_x \cong o_{e,G}.$$

Пусть $g = \dim G$ и $f_1, \dots, f_g \in \mathfrak{m}_{e,G}$ — базис этого максимального идеала. Рассмотрим элементы $x_1, \dots, x_g \in \mathfrak{m}_{x,X}$, редукции которых по $\text{mod } I_x$ равны соответственно $f_1, \dots, f_g$. Идеал $(x_1, \dots, x_g) \subset o_{x,X}$ определяет тогда в точке x росток подсхемы схемы X . Так как этот росток пересекает слой $\phi^{-1}(y)$ в изолированной точке x , то из предложения 5.5.1, EGA 3, следует, что в X существует единственная связная замкнутая подсхема H , продолжающая этот росток и конечная над Y .

Рассмотрим отображение Ψ как X -морфизм из $G \times X$ в $X \times_X X$. Замена базы $H \rightarrow X$ определяет морфизм

$$\Psi': G \times H \rightarrow X \times_X H.$$

Поскольку действие σ свободно, Ψ и, следовательно, Ψ' — замкнутые вложения. Морфизм $\Psi'' = p_1 \circ \Psi'$ из $G \times H$ в X будет тогда конечным, и я утверждаю, что он является изоморфизмом. Отметим сначала, что это утверждение доказывает предложение. В самом деле, если ввести действие группы G на $G \times H$ как произведение умножения слева на G и тождественного отображения на H , то по своему определению

морфизм Ψ'' будет G -линейным отображением. Но пара (H, p_2) является геометрическим фактором схемы $G \times H$ по G . В силу единственности геометрических факторов имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \xrightarrow{\sim} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \phi \\ H & \xrightarrow{\sim} & Y \end{array}$$

Из плоскости морфизма p_2 вытекает, что ϕ — плоский морфизм. А так как схемы $G \times (G \times H)$ и $(G \times H) \times_N (G \times H)$ изоморфны, получаем, что схема $G \times X$ изоморфна схеме $X \times_Y X$.

Чтобы получить изоморфность отображения Ψ'' , рассмотрим ядро и коядро гомоморфизма

$$o_X \rightarrow \Psi''_*(o_{G \times H}).$$

Объединение носителей этих двух когерентных пучков будет замкнутым подмножеством Z в X . Из перестановочности отображения Ψ'' с действием группы G находим, что множество Z инвариантно относительно группы G . Но ввиду субмерсивности морфизма ϕ схема Y является топологическим факторпространством схемы X по группе G . Следовательно, $Z = \phi^{-1}(Z_0)$ для некоторого замкнутого множества Z_0 из Y . Итак, если $Z \neq \emptyset$, то $y \in Z_0$ и потому $x \in Z$.

Покажем теперь, что $x \notin Z$. Заметим сначала, что слой $(\Psi'')^{-1}(x)$ состоит из одной точки $(e, x) \in G \times H$. Действительно, если (α, x') — геометрическая точка слоя $(\Psi'')^{-1}(x)$, возможно, над большим алгебраически замкнутым полем $\Omega \supset k$, то $\sigma(\alpha, x') = x$. Таким образом, $\phi(x') = \phi(x) = y$ и $x' \in H \cap \phi^{-1}(y)$. По определению схемы H это дает $x' = x$, и так как действие σ свободно, получаем, что $\alpha = e$. Отсюда вытекает что слоем пучка $\Psi''_*(o_{G \times H})$ в точке x будет локальное кольцо пучка $o_{G \times H}$ в точке (e, x) . Поскольку

этот слой конечен над $O_{x, X}$, для доказательства его изоморфности кольцу $O_{x, X}$ достаточно показать, что изоморфны *полные* локальные кольца

$$\hat{O}_{x, X} \quad \text{и} \quad \hat{O}_{e, G} \hat{\otimes}_k \hat{O}_{x, H}.$$

Подытожим сложившуюся ситуацию в следующей лемме о локальных кольцах, в которой $\hat{\sigma}$ — отображение, двойственное к групповому действию σ , $O = \hat{O}_{x, X}$, $k[[f_1, \dots, f_g]] = \hat{O}_{e, G}$ и элементы f_i и x_i — те же, что и выше.

ЛЕММА. Пусть O — полное локальное кольцо, $m \subset O$ — его максимальный идеал и $k \subset O$ — такое подполе, что $k \xrightarrow{\sim} O/m$. Рассмотрим локальный гомоморфизм $\hat{\sigma}$ кольца O в кольцо формальных степенных рядов $O[[f_1, \dots, f_g]]$, для которого

i) композиция $\hat{\psi}$

$$O \xrightarrow{\hat{\sigma}} O[[f_1, \dots, f_g]] \rightarrow O/m[[f_1, \dots, f_g]]$$

сюръективна,

ii) композиция

$$O \xrightarrow{\hat{\sigma}} O[[f_1, \dots, f_g]] \rightarrow \frac{O[[f_1, \dots, f_g]]}{(f_1, \dots, f_g)} \cong O$$

тождественна.

Пусть x_i — такие элементы кольца O , что $\hat{\psi}(x_i) = f_i$.
Композиция $\hat{\psi}''$

$$O \rightarrow O[[f_1, \dots, f_g]] \rightarrow \frac{O}{(x_1, \dots, x_g)}[[f_1, \dots, f_g]]$$

будет тогда изоморфизмом.

Доказательство. Из полноты локальных колец легко следует, что отображение $\hat{\psi}''$ сюръективно. Чтобы доказать его инъективность, достаточно показать по индукции, что из $\hat{\psi}''(\alpha) = 0$ следует включение $\alpha \in (x_1, \dots, x_g)^{n+1}$. Допустим, что $\hat{\psi}''(\alpha) = 0$ и $\alpha \in (x_1, \dots, x_g)^n$. Напишем

$$\alpha = \sum_{|A|=n} c_A x^A,$$

где $A = (a_1, \dots, a_g)$ — мульти-индекс, $|A| = \sum a_i$,
а x^A — символическая степень. В силу ii) и i) имеем

$$\hat{o}(x_i) \in x_i + f_i + \sum_k f_k m[[f_1, \dots, f_g]],$$

так что

$$\hat{\psi}''(x_i) = \sum_{j=1}^g a_{ij} f_j, \quad \det(a_{ij}) \in 1 + m.$$

Следовательно, кольцо $\frac{o}{(x_1, \dots, x_g)} [[f_1, \dots, f_g]]$ изоморфно кольцу

$$\frac{o}{(x_1, \dots, x_g)} [\hat{\psi}''(x_1), \dots, \hat{\psi}''(x_g)].$$

Поскольку

$$0 = \hat{\psi}''\alpha = \sum_{|A|=n} \hat{\psi}''(c_A) \cdot \hat{\psi}''(x)^A,$$

получаем, что $\hat{\psi}''(c_A) \in (\hat{\psi}''(x_1), \dots, \hat{\psi}''(x_g))$. Используя это и условие ii), находим, что исходные коэффициенты c_A принадлежат идеалу $(x_1, \dots, x_g)$. Таким образом, $\alpha \in (x_1, \dots, x_g)^{n+1}$. $\square$

Условимся для определенности, что в этой главе мы будем иметь дело исключительно со схемами X , определенными над фиксированным (но не обязательно алгебраически замкнутым) полем k . Фиксируем также алгебраически замкнутое поле $\Omega \supset k$ и будем вместо $X \times_k \Omega$ писать $\bar{X}$, если схема определена над k . Основным объектом в этой главе будет действие редуктивной алгебраической группы G на схеме X . Наша задача состоит в выяснении того, для каких открытых множеств $U \subset X$, инвариантных относительно группы G , существует геометрический фактор U/G ? С этой целью мы введем основополагающее понятие стабильной точки схемы X . Оставшаяся часть книги будет посвящена приложениям этого понятия.

§ 1. Определения

Из-за того, что мы имеем дело с незамкнутыми полями, нам понадобится предварительный анализ таких понятий, как действие алгебраической группы на кольцо, инварианты и пр. Все эти тривиальные рассуждения собраны вместе в этом параграфе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть G — алгебраическая группа, $\alpha: G \times G \rightarrow G$ и $\beta: GL(n) \times GL(n) \rightarrow GL(n)$ — умножение в группах G и $GL(n)$ соответственно. Под *представлением* группы G понимается такой морфизм $\rho: G \rightarrow GL(n)$, что для морфизмов из $G \times G$ в группу $GL(n)$ выполняется равенство $\beta \circ (\rho \times \rho) = \rho \circ \alpha$.

Такое представление приводит к трем типам действий: а) к морфизму $\sigma: G \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$, являющемуся действием на схеме $\mathbb{A}^n$ в смысле главы 0; б) к ото-

бражению множеств $G_k \times V \rightarrow V$, где V есть n -мерное векторное пространство над k ; с) к двойственному действию (если группа G линейна) в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть G — линейная алгебраическая группа и $S = \Gamma(G, o_G)$. Обозначим через $\hat{\alpha}: S \rightarrow S \otimes_k S$ гомоморфизм, определяющий умноже-

ние, а через $\hat{\beta}: S \rightarrow k$ — гомоморфизм, определяющий вложение единицы в группу G . Пусть V — векторное пространство, а R — кольцо над полем k . *Двойственным действием* группы G на пространстве V (соответственно на кольце R) называется такой гомоморфизм векторных пространств (соответственно колец)

$$\hat{\sigma}: V \rightarrow S \otimes_k V \quad (\text{соответственно } \hat{\sigma}: R \rightarrow S \otimes_k R),$$

что (i) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & S \otimes_k V & \\ \hat{\sigma} \nearrow & & \searrow \hat{\alpha} \otimes 1_V \\ V & & S \otimes_k S \otimes_k V \\ \hat{\sigma} \searrow & & \nearrow 1_S \otimes \hat{\sigma} \\ & S \otimes_k V & \end{array}$$

(соответственно аналогичная диаграмма для R) и (ii) отображение

$$V \xrightarrow{\hat{\sigma}} S \otimes_k V \xrightarrow{\hat{\beta} \otimes 1_V} V$$

является тождественным (соответственно аналогичное утверждение для R).

В случае конечномерного векторного пространства V обозначим через $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ его базис, и пусть $\hat{\sigma}(e_i) = \sum a_{ij} \otimes e_j$. Элементы $a_{ij} \in \Gamma(G, o_G)$ определяют тогда морфизм группы G в пространство A^{n^2} , и условия (i) и (ii) означают, что образ этого морфизма содержится в открытом множестве $GL(n) \subset A^{n^2}$ и что сам морфизм является гомоморфизмом. Иначе говоря, понятие двойственного действия на конечномерном векторном пространстве есть простая перефразировка

понятия представления. С другой стороны, в случае кольца R понятие двойственного действия является перефразировкой понятия действия группы G на схеме $\text{Spec}(R)$. Как мы увидим, эта двойственная точка зрения очень удобна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\hat{\sigma}$ — двойственное действие группы G на пространстве V (соответственно на кольце R). Векторное пространство $W \subset V$ (соответственно $W \subset R$) называется *инвариантным* относительно действия группы G , если $\hat{\sigma}(W) \subset S \otimes_k W$. Кроме того, элемент $x \in V$ (соответственно $x \in R$) называется *инвариантным*, если $\hat{\sigma}(x) = 1 \otimes x$.

Весьма важным, хотя и элементарным наблюдением является

ЛЕММА ¹⁾. Если на произвольном векторном пространстве V задано двойственное действие $\hat{\sigma}$ группы G , то V можно представить как объединение конечномерных инвариантных подпространств.

Доказательство. Пусть $S = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$, $\hat{\alpha}: S \rightarrow S \otimes S$ — групповой закон и $\hat{\beta}: S \rightarrow k$ — отображение, отвечающее вложению единицы в группу G . Для доказательства леммы возьмем какое-нибудь конечномерное векторное пространство $V_1 \subset V$. Достаточно построить конечномерное инвариантное подпространство $V_2 \subset V$, содержащее V_1 .

Пусть $S^* = \text{Hom}_k(S, k)$ и γ — композиция

$$S^* \otimes V \xrightarrow{1_{S^*} \otimes \hat{\sigma}} S^* \otimes S \otimes V \xrightarrow{\langle \rangle \otimes 1_V} V,$$

где $\langle \rangle$ обозначает «сокращение» ²⁾. Положим $V_2 = \gamma(S^* \otimes V_1)$.

а) Пространство V_2 конечномерно. Если $\{v_i\}$ — базис в V_1 и $\hat{\sigma}(v_i) = \sum_j a_{ij} \otimes v_{ij}$, то V_2 содержится в подпространстве, порожденном элементами $\{v_{ij}\}$.

¹⁾ Эту лемму указал мне Картье.

²⁾ То есть отображение $S^* \otimes S \rightarrow k$, задаваемое формулой $u^* \otimes u \rightarrow u^*(u)$. — Прим. перев.

b) $V_1 \subset V_2$, ибо отображение γ удовлетворяет тождеству $\gamma(\hat{\beta} \otimes v) = v$, где $\hat{\beta} \in S^*$ и $v \in V$.

с) $\hat{\sigma}(V_2) \subset S \otimes V_2$. Чтобы доказать это, достаточно показать, что $\hat{\sigma}[\gamma(u^* \otimes v)] \in S \otimes V_2$ для всех $u^* \in S^*$, $v \in V_1$. Но это так, если для всех $u'^* \in S^*$

$$\langle u'^*, \hat{\sigma}[\gamma(u^* \otimes v)] \rangle \in V_2.$$

Поскольку $\hat{\sigma}$ — двойственное действие, $(\hat{\alpha} \otimes 1_V) \circ \hat{\sigma} = (1_S \otimes \hat{\sigma}) \circ \hat{\sigma}$. Находим, следовательно, что

$$\langle u'^*, \hat{\sigma}[\gamma(u^* \otimes v)] \rangle = \gamma[\hat{\alpha}^*(u'^* \otimes u^*) \otimes v],$$

где $\hat{\alpha}^*$ — отображение, двойственное к $\hat{\alpha}$. Правая часть, очевидно, принадлежит пространству V_2 . $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Алгебраическая группа G называется *редуктивной*, если она линейна и каждое ее представление вполне приводимо. Иначе говоря, если действие группы G на пространстве A^n оставляет инвариантным некоторое $A^{n'} \subset A^n$ (где $A^{n'}$ — линейное подпространство, проходящее через начало координат), то оно оставляет инвариантным и некоторое дополнение $A^{n-n'}$.

Если группа G редуктивна, а $\sigma: G \times A^n \rightarrow A^n$ — ее представление, то аффинное пространство A^n можно, очевидно, разложить в произведение

$$B_1 \times B_2 \times \dots \times B_m$$

аффинных пространств, которые группа G переводит в себя и которые неприводимы относительно действия группы G . Допустим, что сомножители так перенумерованы, что группа G действует тривиально на $B_1, \dots, B_t$ и нетривиально на $B_{t+1}, \dots, B_m$. Тогда она действует тривиально на подпространстве

$$B_1 \times \dots \times B_t \times (0) \times \dots \times (0) \subset A^n,$$

и это подпространство содержит любое другое подпространство, на котором группа G действует тривиально. Проекция пространства A^n на это подпространство, переводящая произведение $B_{t+1} \times \dots \times B_m$

в нуль, имеет в дальнейшем первостепенное значение. Удобнее, однако, рассмотреть двойственную ситуацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа и $S = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$. Пусть $\hat{\sigma}$ — двойственное действие группы G на векторном пространстве V . *Оператором Рейнольдса*¹⁾ называется такой гомоморфизм $E: V \rightarrow V$, что:

- i) E перестановочен с $\hat{\sigma}$, т. е. $\hat{\sigma} \circ E = (1_S \otimes E) \circ \hat{\sigma}$,
- ii) $E^2 = E$,
- iii) $Ex = x$ тогда и только тогда, когда $\hat{\sigma}(x) = 1 \otimes x$.

Если пространство V конечномерно, то из определения «редуктивности» сразу следует существование и единственность оператора E . То же самое верно для произвольных пространств V , если учесть приведенную выше лемму (ср. Картье [38], доклад 7). Когда мы имеем двойственные действия группы G на двух векторных пространствах V_1 и V_2 и линейное отображение $\phi: V_1 \rightarrow V_2$, перестановочное с этими действиями, то в силу канонического характера оператора E справедливо равенство $\phi \circ E_1 = E_2 \circ \phi$, в котором E_1 и E_2 — операторы Рейнольдса на пространствах V_1 и V_2 соответственно.

Допустим, что пространство V является на самом деле кольцом R и σ — действие на этом кольце. Образ оператора E будет тогда подпространством инвариантных элементов в R и будет образовывать *подкольцо* $R_0 \subset R$. Хотя E и не является кольцевым гомоморфизмом, для него выполняется хорошо известное тождество Рейнольдса:

$$\text{Если } x \in R, y \in R_0, \text{ то } E(x \cdot y) = (Ex) \cdot y. \quad (*)$$

(Картье [38], 7-08). Чтобы показать это, положим $R_1 = \ker E$. Тогда $R \cong R_0 \oplus R_1$ и тождество $(*)$ эквивалентно двум утверждениям: $R_0 \cdot R_0 \subset R_0$ и $R_0 \cdot R_1 \subset R_1$. Доказывая последнее, возьмем $g \in R_0$ и (конечномерное) неприводимое инвариантное подпространство

¹⁾ Операторы с такими свойствами (операторы усреднения) были введены в классической работе Рейнольдса по турбулентности (см. [51]). — Прим. перев.

$V \subset R_1$. Тогда или $g \cdot V = 0$, или же умножение на g определяет изоморфизм пространства V с неприводимым инвариантным подпространством $g \cdot V$. Так как элемент g инвариантен, то представления группы G в пространствах V и $g \cdot V$ изоморфны и нетривиальны и, следовательно, $g \cdot V \subset R_1$.

Редуктивные алгебраические группы были классифицированы Нагатой [27]. Его результат таков: а) в характеристике $p (\neq 0)$ единственными редуктивными группами G являются группы, связная компонента G_0 которых есть тор $(G_m)^r$, а порядок факторгруппы G/G_0 взаимно прост с p ; б) в характеристике 0 группа G редуктивна тогда и только тогда, когда радикал ее связной компоненты G_0 является тором. Хорошо известно, что в этом случае группа G_0 изогенна прямому произведению тора T и полупростой алгебраической группы G'_0 , в качестве которой можно взять коммутант группы G_0 (см. [27], лемма 10 или [41], доклад 16, лемма 2).

§ 2. Аффинный случай

Изложив необходимые предварительные сведения, мы можем теперь приступить к первой части теории — действию редуктивной алгебраической группы на аффинной схеме X . Чтобы не заслонять суть доказательств, мы не предполагаем, что X — алгебраическая схема над k .

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X — аффинная схема над полем k , G — редуктивная алгебраическая группа и $\sigma: G \times X \rightarrow X$ — действие группы G на схеме X . Тогда существует универсальный категорный фактор (Y, ϕ) схемы X по группе G , в котором ϕ — универсально субмерсивный морфизм, а схема Y аффинна. Более того, если схема X нётерова (соответственно алгебраична над k), то схема Y также нётерова (соответственно алгебраична над k).

Доказательство. Пусть $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; группа G действует тогда двойственным образом на кольце R . Пусть $R_0 \subset R$ — кольцо инвариантов, $Y = \text{Spec}(R_0)$

и $\phi: X \rightarrow Y$ — морфизм, индуцированный включением $R_0 \subset R$. Первая часть теоремы вытекает тогда из следующих алгебраических фактов:

(1) если S_0 — алгебра над кольцом R_0 , то кольцо инвариантов алгебры $R \otimes_{R_0} S_0$ совпадает с S_0 ,

(2) если $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ — множество инвариантных идеалов кольца R , то $(\sum \mathfrak{A}_i) \cap R_0 = \sum (\mathfrak{A}_i \cap R_0)$. В самом деле, используем замечание 6 § 0.2, чтобы показать, что (Y, ϕ) — универсальный категорный фактор и морфизм ϕ субмерсивен. Из утверждения (1) следует, что кольцо $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ является для всех открытых аффинных подмножеств $U \subset Y$ кольцом инвариантов кольца $\Gamma(U, \phi_*(\mathcal{O}_X))$. Таким образом, пучок $\mathcal{O}_Y$ совпадает с пучком инвариантных сечений в $\phi_*(\mathcal{O}_X)$ — условие i) предложения 0.3. Чтобы переформулировать утверждение (2) в геометрической форме, обозначим через $W_i \subset X$ замкнутые подмножества, определяемые идеалами $\mathfrak{A}_i$. Тогда оно гласит

$$\left[\text{замыкание} \left\{ \phi \left(\bigcap_i W_i \right) \right\} \right] = \bigcap_i [\text{замыкание} (\phi(W_i))].$$

Применяя это к случаю, когда W_1 — произвольное замкнутое инвариантное подмножество в X , а $W_2 = \phi^{-1}(y)$, где y — замкнутая точка из Y , убеждаемся, что множество $\phi(W_1)$ замкнуто. Учитывая это, получаем из (2) также, что $\phi \left(\bigcap_i W_i \right) = \bigcap_i \phi(W_i)$.

Это условие ii) замечания 6 § 0.2. Для того чтобы заключить, что пара (Y, ϕ) является даже *универсальным* категорным фактором, необходимо рассмотреть расширения базы $Y' \rightarrow Y$. Ввиду замечания 8 § 0.2 нам нужно исследовать лишь случай, когда схема Y' аффинна, и показать, что тогда она будет категорным фактором схемы $X \times_Y Y'$ по группе G .

Но в силу (1) кольцо $\Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ будет все еще кольцом инвариантов в $\Gamma \left(X \times_Y Y', \mathcal{O}_{X \times_Y Y'} \right)$, и задача сводится к только что разобранным.

Для доказательства утверждения (1) возьмем оператор Рейнольдса $E: R \rightarrow R$ и положим $R_1 = \ker E$. Благодаря тождеству Рейнольдса имеется изоморфизм $R \cong [R_0 \oplus R_1]_{R_0}$ R_0 -модулей. Следовательно, $[R \otimes_{R_0} S_0] \cong S_0 \oplus [R_1 \otimes_{R_0} S_0]$ и, в частности, кольцо S_0 является подкольцом в $R \otimes_{R_0} S_0$. Предположим теперь, что $\sum a_i' \otimes b_i$, где $a_i \in R$, $b_i \in S_0$, — инвариантный элемент кольца $R \otimes_{R_0} S_0$. Записывая оператор Рейнольдса в кольце $R \otimes_{R_0} S$ также через E , имеем

$$\begin{aligned} \sum (a_i \otimes b_i) &= E \left\{ \sum (a_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b_i) \right\} = \\ &= \sum E(a_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b_i) \text{ (ввиду тождества Рейнольдса)} \\ &= \sum Ea_i \otimes b_i = 1 \otimes \left(\sum Ea_i \cdot b_i \right) \in S_0. \end{aligned}$$

Это доказывает (1).

Чтобы получить утверждение (2), возьмем какое-нибудь множество $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ инвариантных идеалов кольца R . Допустим, что $f \in (\sum \mathfrak{A}_i) \cap R_0$. Тогда $f = \sum_{i \in I} f_i$, где $f_i \in \mathfrak{A}_i$ и все f_i , кроме конечного числа, равны нулю. Находим, что

$$f = Ef = \left[\sum_{i \in I} Ef_i \right] \in \sum_{i \in I} (\mathfrak{A}_i \cap R_0).$$

Перейдем теперь ко второй части теоремы. Предположим, что схема X нётерова. Заметим, что если $\mathfrak{A} \subset R_0$ — произвольный идеал, то из утверждения (1), примененного к кольцу $S_0 = R_0/\mathfrak{A}$, вытекает, что $(\mathfrak{A} \cdot R) \cap R_0 = \mathfrak{A}$. Тем самым частично упорядоченное множество идеалов кольца R_0 вкладывается как частично упорядоченное подмножество в множество идеалов кольца R . Следовательно, условие обрыва возрастающих цепей идеалов кольца R влечет за собой выполнение аналогичного условия для кольца R_0 , и мы заключаем, что схема Y нётерова.

Предположим теперь, что X — схема конечного типа над полем k , т. е. R — алгебра конечного типа над k . Допустим сначала, что R — градуированная

алгебра над полем k и что действие группы G сохраняет градуировку. Кольцо R_0 будет тогда градуированным подкольцом в R и потому автоматически конечно порожденным над k , ибо, как мы уже показали, оно нётерово.

Общий случай можно затем свести к градуированному. Выберем для этого конечномерное инвариантное подпространство $V \subset R$, содержащее множество образующих кольца R . Пусть R' — симметрическая алгебра векторного пространства V . Действие группы G на пространстве V продолжается до действия на кольце R' , сохраняющего градуировку. Кольцо R вместе с действием на нем группы G можно отождествить с факторкольцом $R'/\mathfrak{A}$ кольца R' по инвариантному идеалу $\mathfrak{A}$. Если R'_0 — кольцо инвариантов в R' , то оно конечно порождено, и достаточно поэтому показать, что кольцо R_0 совпадает с образом кольца R'_0 в R . Это следует из еще одного общего алгебраического факта:

(3) Если $\mathfrak{A}$ — инвариантный идеал кольца R , то кольцо $R_0/\mathfrak{A} \cap R_0$ является кольцом инвариантов в $R/\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $E: R \rightarrow R$ — оператор Рейнольдса на R , а $\bar{E}: R/\mathfrak{A} \rightarrow R/\mathfrak{A}$ — оператор Рейнольдса на $R/\mathfrak{A}$. Для всех $f \in R$ имеем

$$(Ef) \bmod \mathfrak{A} = \bar{E}(f \bmod \mathfrak{A}).$$

В частности, если для элемента $f \in R$ его редукция $(f \bmod \mathfrak{A})$ инвариантна в кольце $R/\mathfrak{A}$, то Ef отображается в тот же самый элемент кольца $R/\mathfrak{A}$, что и f . Иначе говоря, каждый инвариант кольца $R/\mathfrak{A}$ принадлежит образу кольца R_0 . $\square$

Следствие (доказательства) 1.2. Если W_1 и W_2 — два непересекающихся замкнутых инвариантных подмножества в X , то их можно разделить инвариантом $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, принимающим значение 0 на W_1 и 1 на W_2 .

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_i$ — идеал, отвечающий множеству W_i . Используя утверждение (2),

видим, что $1 \in (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \cap R_0 = \mathfrak{A}_1 \cap R_0 + \mathfrak{A}_2 \cap R_0$. Таким образом, $1 = f + g$, где $f \in \mathfrak{A}_1 \cap R_0$, $g \in \mathfrak{A}_2 \cap R_0$ и f — требуемый инвариант. $\square$

Это следствие является для многих целей единственным реально важным геометрическим свойством, извлекаемым из условия редуктивности группы G . По этой причине оно может быть основой для значительного обобщения результатов этой главы, см. [29].

Обобщение 1.3. *В условиях теоремы 1.1 пара (Y, ϕ) является геометрическим фактором схемы X по группе G в том и только том случае, когда действие группы G на X замкнуто. Более того, в этом случае пара (Y, ϕ) будет в действительности универсальным геометрическим фактором.*

Доказательство. Если (Y, ϕ) — геометрический фактор, то действие σ замкнуто ввиду леммы 0.6.

Предположим, наоборот, что действие σ замкнуто, и допустим, что множество $\Psi(G \times X)$ строго содержится в $X \times_Y X$. Тогда существует пара таких гео-

метрических точек x_1, x_2 схемы X над подходящим алгебраически замкнутым полем Ω , что $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, но орбиты $O(x_1)$ и $O(x_2)$ суть непересекающиеся множества в $\bar{X}$. По условию орбиты $O(x_1)$ и $O(x_2)$ — замкнутые инвариантные подмножества в $\bar{X}$. Таким образом, должна существовать инвариантная функция $f \in \Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k \Omega$, равная 0 в x_1 и 1 в x_2 . Поскольку кольцо инвариантов из $\Gamma(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ имеет вид $R_0 \otimes_k \Omega$, где R_0 — кольцо инвариантов кольца $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, найдется инвариант $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, для которого $f(x_1) \neq f(x_2)$. Итак, $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$, что дает противоречие.

Утверждение (1) из доказательства теоремы 1.1 позволяет утверждать, что все это сохраняется при аффинной замене базы $Y' \rightarrow Y$. Согласно замечанию 3 § 0.2, этим доказано, что (Y, ϕ) — универсальный геометрический фактор. $\square$

§ 3. Линеаризация обратимого пучка

Прежде чем переходить к анализу действия редуктивной алгебраической группы G на произвольной алгебраической предсхеме X , установим связь между действием группы G на схеме X и обратимыми пучками L этой схемы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть G , X , L , σ будут соответственно алгебраической группой, алгебраической предсхемой, обратимым пучком на X и действием группы G на X . Тогда G -линеаризация пучка L состоит в задании изоморфизма

$$\phi: \sigma^* L \xrightarrow{\sim} p_2^* L$$

пучков на схеме $G \times X$, удовлетворяющего условию коцикла

(*) пусть $\mu: G \times G \rightarrow G$ — групповой закон. Заметим, что все отображения p_{23} , $\mu \times 1_X$ и $1_G \times \sigma$ суть морфизмы из $G \times G \times X$ в $G \times X$. Условие состоит в коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} [\sigma \circ (1_G \times \sigma)]^* L & \xrightarrow{(1_G \times \sigma)^* \phi} & [p_2 \circ (1_G \times \sigma)]^* L \\ \parallel & & \parallel \\ & [\sigma \circ p_{23}]^* L \xrightarrow{p_{23}^* \phi} [p_2 \circ p_{23}]^* L & \\ & & \parallel \\ [\sigma \circ (\mu \times 1_X)]^* L & \xrightarrow{(\mu \times 1_X)^* \phi} & [p_2 \circ (\mu \times 1_X)]^* L \end{array}$$

Чтобы освоиться с этим понятием, примем, что основное поле алгебраически замкнуто и G_k — группа геометрических точек группы G над полем k . Отображение ϕ можно для каждого $\alpha \in G_k$ ограничить на подсхему $\{\alpha\} \times X \subset G \times X$. Если $T_\alpha: X \rightarrow X$ — автоморфизм схемы X , задаваемый формулой

$$x \rightarrow \sigma(\alpha, x),$$

то ограничением отображения ϕ будет морфизм $\phi_\alpha: T_\alpha^*L \xrightarrow{\sim} L$. Из условия коцикла получаем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_{\alpha\beta}^*L & \xrightarrow{(\phi_{\alpha\beta})} & L \\ (T_\beta^*\phi_\alpha) \searrow & & \nearrow (\phi_\beta) \\ & T_\beta^*L & \end{array}$$

коммутативна для всех $\alpha, \beta \in G_k$, т. е. $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ T_\beta^*\phi_\alpha$.

Другой способ сформулировать определение состоит в рассмотрении линейного расслоения $\mathbf{L}$, отвечающего пучку L . Пусть $\pi: \mathbf{L} \rightarrow X$ — проекция этого расслоения. Таким изоморфизмам, как отображение ϕ , канонически сопоставляются изоморфизмы (в категории расслоенных пространств) линейных расслоений над схемой $G \times X$:

$$(G \times X) \times_X \mathbf{L} \xleftarrow[\sim]{\Phi} (G \times X) \times_X \mathbf{L},$$

где первое произведение берется на основе отображения $\sigma: G \times X \rightarrow X$, а второе — на основе проекции $p_2: G \times X \rightarrow X$. (Напомним, что переход от пучков к расслоениям является *контравариантным* функтором). Отсюда получаем опять-таки канонически морфизмы $\Sigma = p_2 \circ \Phi$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbf{L} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbf{L} \\ 1_G \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

Отображения Σ представляют собой изоморфизмы линейного расслоения $G \times \mathbf{L}$ над схемой $G \times X$ и расслоения $\mathbf{L}$ над X . Условие коцикла без труда переписывается как условие коммутативности следующего

куба:

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times G \times L & \xrightarrow{\mu \times 1_L} & G \times L & & \\
 \downarrow & \searrow 1_G \times \Sigma & \downarrow & \searrow \Sigma & \\
 & G \times L & \xrightarrow{\Sigma} & L & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 G \times G \times X & \xrightarrow{\mu \times 1_X} & G \times X & & \\
 \downarrow & \searrow 1_G \times \sigma & \downarrow & \searrow \sigma & \\
 & G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X &
 \end{array}$$

Итак, можно сказать, что морфизм Σ соответствует отображению ϕ , удовлетворяющему условию (*), в том и только том случае, когда он является *действием* группы G на расслоении L . Таким образом, G -линеаризация пучка L состоит в продолжении действия группы G на схеме X до «расслоенного действия» группы G на L .

К примеру, когда $X = \operatorname{Spec}(k)$, $L = \mathcal{O}_X = k$ и $L = \mathbf{A}^1$, то G -линеаризация пучка L есть не что иное, как задание характера $\chi: G \rightarrow G_m$, ибо группой автоморфизмов схемы $\mathbf{A}^1$ как линейного расслоения над $\operatorname{Spec}(k)$ служит группа G_m . Точнее, характер χ задает такое действие Σ группы G на $\mathbf{A}^1$, что

$$\Sigma(\alpha, z) = \chi(\alpha) \cdot z$$

для $\alpha \in G_k$, $z \in (\mathbf{A}^1)_k$. С другой стороны, он определяет морфизм пучков $\phi: \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{O}_G$, который задается формулой

$$\phi(f) = \bar{\chi}^{-1} \cdot f,$$

где $\bar{\chi} \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G^*)$ — функция, соответствующая отображению χ . (Переход к обратному характеру происходит вследствие контравариантности соотношения между пучками и расслоениями.)

Имеется еще один тип действия, связанный с G -линеаризацией пучка L , и для дальнейшего он наиболее важен. Это двойственное действие группы G

на пространстве $H^0(X, L)$. Оно дается композицией

$$H^0(X, L) \xrightarrow{\sigma^*} H^0(G \times X, \sigma^*L) \xrightarrow{\phi} H^0(G \times X, p_2^*L)$$

$$\wr \parallel$$

$$H^0(G, o_G) \otimes H^0(X, L)$$

в которой последний изоморфизм есть следствие формулы Кюннета. Тот факт, что это двойственное действие, вытекает из условия коцикла для отображения ϕ . Таким образом, отображение ϕ позволяет говорить об *инвариантных сечениях* пучка L .

Отметим, что как тензорное произведение двух G -линеаризованных обратимых пучков, так и обратный к одному G -линеаризованному обратимому пучку, наделяются канонической G -линеаризацией. Множество G -линеаризованных обратимых пучков, рассматриваемых по модулю изоморфизма, образует, следовательно, абелеву группу. Мы будем обозначать ее через

$$\text{Pic}^G(X).$$

Если, кроме того, $f: X \rightarrow Y$ есть G -линейный морфизм предсхем, снабженных действием группы G , то он индуцирует гомоморфизм

$$f^*: \text{Pic}^G(Y) \rightarrow \text{Pic}^G(X).$$

В частности, когда группа G действует на схеме Y тривиально, каждый обратимый пучок на Y обладает тривиальной G -линеаризацией. Таким образом мы получаем индуцированное отображение из $\text{Pic}(Y)$ в $\text{Pic}^G(X)$. Когда (Y, f) — геометрический фактор схемы X по группе G и действие свободно, из предложения 0.9 и теории спуска из SGA 8 вытекает, что группы $\text{Pic}^G(X)$ и $\text{Pic}(Y)$ *изоморфны*.

К интересному примеру этого понятия приводит действие группы $\text{PGL}(n)$ на проективном пространстве $\mathbf{P}_n$. Напомним, что $\text{PGL}(n)$ — это открытое подмножество в

$$\mathbf{P}_{n^2+2n} \cong \text{Proj } k[a_{00}, \dots, a_{0n}; a_{10}, \dots, a_{1n}; \dots; a_{n0}, \dots, a_{nn}]$$

с $\det(a_{ij}) \neq 0$, а $\mathbf{P}_n = \text{Proj } k[X_0, \dots, X_n]$. Морфизм

$$\sigma: \text{PGL}(n) \times \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n$$

можно задать (см. EGA 2, § 4.2) соотношением

$$\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \cong p_1^*[\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n^2+2n}}(1)] \otimes p_2^*[\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)]$$

$$\sigma^*(X_i) = \sum_{j=0}^n p_1^*(a_{ij}) \otimes p_2^*(X_j).$$

Пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n^2+2n}}(1)$, к сожалению, нетривиален на открытом множестве $\mathbf{PGL}(n)$: именно, его порядок в группе $\text{Pic}[\mathbf{PGL}(n)]$ равен $n+1$. Следовательно, пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$ не допускает $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризации!

Чтобы построить $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризацию, рассмотрим на пространстве $\mathbf{P}_n$ линейное расслоение $\mathbf{L}$, отвечающее пучку $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$. Хорошо известно, что n -я внешняя степень кокасательного расслоения к $\mathbf{P}_n$ изоморфна $(n+1)$ -й тензорной степени пучка $\mathcal{L}$. Любое действие на пространстве $\mathbf{P}_n$ поднимается до действия на кокасательном расслоении и, следовательно, на $\mathbf{L}^{n+1}$. Итак, пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(n+1)$ допускает $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризацию.

Пусть, с другой стороны, $\bar{\omega}: \mathbf{SL}(n+1) \rightarrow \mathbf{PGL}(n)$ — каноническая изогения. Рассмотрим индуцированное действие $\tau = \sigma \circ (\bar{\omega} \times 1_{\mathbf{P}_n})$ группы $\mathbf{SL}(n+1)$ на пространстве $\mathbf{P}_n$. Пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$ можно снабдить $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризацией, ибо, как хорошо известно, группа $\mathbf{SL}(n+1)$ действует на аффинном конусе $\mathbf{A}^{n+1}$ над пространством $\mathbf{P}_n$ и проекция

$$\pi: \mathbf{A}^{n+1} \setminus (0) \rightarrow \mathbf{P}_n$$

$\mathbf{SL}(n+1)$ -линейна. Но расслоение $\mathbf{L}$ получается из схемы $\mathbf{A}^{n+1}$ раздутием точки 0, и отображение π определяет проекцию из $\mathbf{L}$ в $\mathbf{P}_n$. Таким образом, группа $\mathbf{SL}(n+1)$ действует на схеме $\mathbf{L}$ совместимым с ее проекцией на пространство $\mathbf{P}_n$ образом.

Перейдем теперь к общей теории G -линеаризаций.

Предложение 1.4. Пусть связная алгебраическая группа G действует на алгебраической предсхеме X . Предположим, что не существует гомоморфизмов группы $\bar{G}$ на группу $\bar{G}_m$ и что схема X геометри-

чески приведена. Тогда каждый обратимый пучок L на X имеет не более одной G -линеаризации.

Доказательство. Если какой-то пучок L имеет две G -линеаризации, пучок $\bar{L}$, индуцированный на схеме $\bar{X} = X \times_k K$ с алгебраически замкнутым полем $K \supset k$, будет все еще иметь две G -линеаризации. Итак, без потери общности можно предположить, что поле k алгебраически замкнуто. Кроме того, в силу связности группы G G -линеаризации пучка L на разных компонентах схемы X не зависят друг от друга. Доказывая предложение, можно, следовательно, предположить, что схема X связна.

Предложение эквивалентно утверждению, что каноническое отображение $\text{Pic}^G(X) \rightarrow \text{Pic}(X)$ инъективно. Поскольку оно является гомоморфизмом, достаточно выяснить, допускает ли пучок $\mathcal{O}_X$ нетривиальные G -линеаризации. Пусть $\phi: \sigma^*(\mathcal{O}_X) \rightarrow p_2^*(\mathcal{O}_X)$ — такая G -линеаризация и отображение ϕ переводит единичное сечение пучка $\mathcal{O}_X$ в функцию $f \in H^0(\mathcal{O}_{G \times X})$. Так как ϕ — изоморфизм, $f \in H^0(\mathcal{O}_{G \times X}^*)$. Кроме того, условие коцикла для отображения ϕ влечет за собой равенство $f = 1$ на подсхеме $\{e\} \times X$ схемы $G \times X$. Согласно результату Розенлихта ([35], стр. 986, теорема 2) пространство $H^0(\mathcal{O}_{G \times X}^*)$ порождается образами пространств $H^0(\mathcal{O}_G^*)$ и $H^0(\mathcal{O}_X^*)^1$. Более того, по теореме 3 той же статьи $H^0(\mathcal{O}_G^*) \cong k^*$. Таким образом,

$$H^0(\mathcal{O}_{G \times X}^*) \xleftarrow[p_2^*]{\sim} H^0(\mathcal{O}_X^*).$$

Мы получаем, что, поскольку отображение f равно 1 на $\{e\} \times X$, оно должно равняться 1 тождественно. Итак, ϕ — тождественный морфизм. $\square$

Предложение 1.5. Пусть связная линейная алгебраическая группа G действует на алгебраическом

¹⁾ Розенлихт сформулировал свой результат для случая, когда X — многообразие. Обобщение на произвольные приведенные алгебраические предсхемы получается немедленно.

многообразии X , собственном над полем k . Предположим, что не существует гомоморфизмов группы $\bar{G}$ на группу $\bar{G}_m$. Пусть L — обратимый пучок на X и λ является k -рациональной точкой схемы Пикара $\text{Pic}(X/k)$, отвечающей пучку L . Некоторая степень L^n пучка L несет G -линеаризацию тогда и только тогда, когда некоторое кратное $n\lambda$ точки λ инвариантно относительно группы G .

Доказательство. Утверждение «только тогда» очевидно. Предположим, что, обратно, точка $n\lambda$ инвариантна относительно группы G . Я утверждаю тогда, что для некоторого m пучки $\sigma^*(L^{nm})$ и $p_2^*(L^{nm})$ на схеме $G \times X$ изоморфны. Чтобы убедиться в этом, обратимся к последовательности

$$0 \rightarrow H^1(o_G^*) \rightarrow H^1(o_G^* \times_X) \rightarrow H^0(G, R^1 p_{1*}(o_G^* \times_X)),$$

точной в силу теоремы о качелях. Так как $H^1(o_G^*)$ — конечная группа (семинар Шевалле [42], 5-21), то достаточно показать, что образ пучка $\sigma^*(L^n) \otimes p_2^*(L^n)^{-1}$ в группе $H^0(G, R^1 p_{1*}(o_G^* \times_X))$ равен нулю. Но ввиду функториальности определения схемы $\text{Pic}(X/k)$ ¹⁾

$$H^0(G, R^1 p_{1*}(o_G^* \times_X)) \subseteq \text{Hom}_k(G, \text{Pic}(X/k))$$

(равенство выполняется, когда схема X имеет k -рациональную точку). Морфизм из схемы G в $\text{Pic}(X/k)$, определяемый пучком $p_2^*(L^n)$, есть постоянный морфизм, переводящий группу G в точку $n\lambda$. А аналогичный морфизм для пучка $\sigma^*(L^n)$ — это просто ото-

¹⁾ Напомним, что схема $\text{Pic}(X/k)$, где $f: X \rightarrow k$ — схема над k , представляет функтор из категории схем S над полем k , сопоставляющий схеме S факторгруппу группы обратимых пучков на $X \times_k S$ по подгруппе пучков вида $p_2^*(L)$, где $p_2: X \times_k S \rightarrow S$ —

проекция и L — пучок на S . Если схема X имеет рациональную точку $\sigma: \text{Spec}(k) \rightarrow X$, то сразу проверяется, что указанная факторгруппа изоморфна группе классов изоморфизма обратимых пучков L на $X \times_k S$, наделенных изоморфизмом $(\sigma \circ f, 1_S)^* L \cong$

$\cong o_S$. — Прим. перев.

бражение $\psi_{n\lambda}$ (см. определение 0.4). В силу наших предположений они равны и, следовательно, пучки $\sigma^*(L^{nm})$ и $p_2^*(L^{nm})$ изоморфны при некотором m .

Но как отмечалось в доказательстве предложения 1.4, существует изоморфизм $H^0(o_G^* \times x) \cong H^0(o_X^*)$, так что в нашем случае $H^0(o_G^* \times x) \cong k^*$. Отсюда следует, что все изоморфизмы ϕ между пучками $\sigma^*(L^{nm})$ и $p_2^*(L^{nm})$ отличаются друг от друга на константу. Поскольку отображения σ и p_2 совпадают, если их ограничить на подсхему $\{e\} \times X \subset G \times X$, то между ограничениями пучков $\sigma^*(L^{nm})$ и $p_2^*(L^{nm})$ на эту подсхему существует канонический изоморфизм. Возьмем в качестве ϕ отображение, продолжающее этот канонический изоморфизм. Условие коцикла выполняется тогда автоматически: отображения

$$p_{23}^* \phi \circ (1_G \times \sigma)^* \phi \quad \text{и} \quad (\mu \times 1_X)^*$$

отличаются, самое большее, на константу, и так как при ограничении на подсхему $\{e\} \times \{e\} \times X$ они совпадают с некоторым каноническим изоморфизмом, то эта константа должна равняться 1. $\square$

Следствие 1.6. Пусть G , X и L — такие же, как и выше. Тогда, если $\bar{X}$ — нормальное многообразие, то некоторая степень L^n пучка L линеаризуема.

Доказательство. В этой ситуации все компоненты схемы $\text{Pic}(X/k)$, согласно результату Шевалле [43], собственны над k , так что все приведенные компоненты суть абелевы многообразия. Поэтому связанная линейная группа G , будучи как многообразие бирационально эквивалентной проективному пространству, должна действовать на схеме $\text{Pic}(X/k)$ тривиально¹⁾. $\square$

Нам понадобится следующая связь между G -линеаризациями и проективными вложениями.

¹⁾ Недавно я получил от Т. Камбаяси препринт, содержащий результаты, в существенном эквивалентные этому следствию и предложению 1.7.

Предложение 1.7. Пусть X — алгебраическая пред-
 схема, G — алгебраическая группа, действующая на X ,
 и L — такой G -линеаризованный обратимый пучок
 на X , сечения которого не имеют общих нулей. Тогда
 существуют морфизм $I: X \rightarrow \mathbf{P}_n$, действие группы G
 на пространстве $\mathbf{P}_n$ и G -линеаризация пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$,
 такие, что отображение I является G -линейным и
 пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$ вместе со своей G -линеаризацией ин-
 дукцирует с помощью морфизма I пучок L и его
 G -линеаризацию. Более того, если схема X собственна
 над k , то в качестве I можно взять морфизм, опре-
 деляемый полной линейной системой $H^0(X, L)$, и
 если пучок L весьма обилен, то в качестве I можно
 выбрать вложение.

Доказательство. Пусть $\phi: \sigma^*L \xrightarrow{\sim} p_2^*L$ — за-
 данная линеаризация. Отображение ϕ определяет
 двойственное действие группы G на пространстве
 $H^0(X, L)$.

Пусть $V_1 \subset H^0(X, L)$ — любое конечномерное под-
 пространство, сечения из которого не имеют общих
 нулей. Когда пучок L весьма обилен, возьмем про-
 странство V_1 таким, чтобы морфизм схемы X в $\mathbf{P}(V_1)$
 был вложением. Если схема X собственна над k , то
 примем $V_1 = H^0(X, L)$. В любом случае ввиду
 леммы § 1 найдется такое конечномерное инвариант-
 ное относительно действия группы G векторное про-
 странство V , что $V_1 \subset V \subset H^0(X, L)$. Возьмем тогда
 в качестве I морфизм схемы X в $\mathbf{P}(V)$. По опреде-
 лению $H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)) = V$, так что получается двой-
 ственное действие группы G на пространстве $H^0(\mathbf{P}(V),$
 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$. Я утверждаю, что

(*) Существует естественное взаимно однозначное
 соответствие между множеством всех двойственных
 действий группы G на пространстве $H^0(\mathbf{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$
 и множеством всех действий группы G на схеме $\mathbf{P}(V)$,
 наделенных G -линеаризацией пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. (Доказа-
 тельство опускается.)

Это дает нам все требуемые действия. Их совместимость получается непосредственной проверкой. $\square$

В главе 2 нам будет нужно усиление этого результата. Хотя оно включает в себя понятия, которые мы определим лишь в следующем разделе, мы приведем его здесь, ибо его доказательство связано с только что приведенным.

Обобщение 1.8. Допустим, что пучок L обилен. Тогда для достаточно больших N существует такое G -линейное вложение I из предложения 1.7, что $L^N \cong I^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1))$ и

$$X_{(0)}^s(L) = I^{-1} \{ \mathbf{P}_{n, (0)}^s(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \}.$$

Доказательство. По определению множество $X_{(0)}^s(L)$ покрывается конечным числом открытых аффинных множеств X_{s_i} , где s_i — инвариантное сечение пучка L^{n_i} и действие группы G на X_{s_i} имеет нульмерные стационарные подгруппы. Положим

$$\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X) = k[f_1^{(i)}, \dots, f_{m_i}^{(i)}].$$

Можно считать, при необходимости заменяя сечения s_i на подходящие их степени, что

i) каждое сечение s_i является сечением пучка L^N с некоторым фиксированным N ,

ii) для всех j , заключенных между 1 и m_i , сечения $f_j^{(i)} \cdot s_i$ суть сечения пучка L^N .

Допустим, что в предыдущем доказательстве пространство V_1 выбрано так, чтобы $s_i \in V_1$ и $f_j^{(i)} \cdot s_i \in V_1$ для всех i, j . Если $I: X \rightarrow \mathbf{P}_n$ — окончательное вложение, то $s_i = I^*(X_i)$ для подходящих инвариантных сечений X_i пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)$ и потому $X_{s_i} = I^{-1}[\mathbf{P}_{n, X_i}]$. Более того, ввиду условия ii) заключаем, что I отображает множество X_{s_i} изоморфно на замкнутую подсхему в $(\mathbf{P}_n)_{X_i}$. Таким образом, орбита каждой геометрической точки из X_{s_i} замкнута в подмноже-

стве $(P_n)_{X_i}$. В силу обобщения 1.11 отсюда следует, что каждая точка множества $I(X_{s_i})$ строго стабильна в P_n . Следовательно,

$$X_{(0)}^s(L) = \bigcup_i X_{s_i} \subset I^{-1}\{P_{n,(0)}^s(O_{P_n}(1))\}.$$

Противоположное включение доказывается в предложении 1.18.

§ 4. Общий случай

Мы переходим теперь к анализу общей ситуации: G — редуктивная алгебраическая группа, действующая с помощью морфизма σ на произвольной алгебраической предсхеме X . Следующие понятия являются основными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть x — геометрическая точка предсхемы X . Тогда

(а) точка x *предстабильна* (по отношению к σ), если существует такое открытое инвариантное аффинное подмножество $U \subset X$, что x принадлежит U и действие группы G на U замкнуто.

Выберем на схеме X обратимый пучок L и его G -линеаризацию ϕ . Тогда

(b) точка x *полустабильна* (по отношению к σ , L , ϕ), если для некоторого n существует такое сечение $s \in H^0(X, L^n)$, что $s(x) \neq 0$, схема X_s аффинна¹⁾, а сечение s инвариантно, т. е. если $\phi_n: \sigma^*(L^n) \rightarrow p_2^*(L^n)$ — отображение, индуцированное морфизмом ϕ , то $\phi_n(\sigma^*(s)) = p_2^*(s)$.

(с) точка x *стабильна* (по отношению к σ , L , ϕ), если для некоторого n существует такое сечение $s \in H^0(X, L^n)$, что $s(x) \neq 0$, схема X_s аффинна, сечение s инвариантно и действие группы G на множестве X_s замкнуто.

¹⁾ Здесь и далее X_s — это подмножество схемы X , на котором сечение (или функция) s отлично от нуля. — Прим. перев.

Заметим, что множество геометрических точек, удовлетворяющих любому из этих трех условий, будет множеством геометрических точек открытого подмножества схемы X . Соответствующие открытые подмножества обозначим через

$$\begin{aligned} X^s(\text{Pre}), \\ X^{ss}(L), \\ X^s(L)^1). \end{aligned}$$

(1) Отметим сразу, что для любого открытого инвариантного множества $U \subset X$, которое связно и аффинно и на котором группа G действует замкнутым образом, стационарные подгруппы всех геометрических точек из U имеют одинаковую размерность, см. обобщение 1.3 и замечание 5 § 0.2. Можно, следовательно, написать

$$\begin{aligned} X^s(\text{Pre}) &= X_{(0)}^s(\text{Pre}) \cup \dots \cup X_{(r)}^s(\text{Pre}), \\ X^s(L) &= X_{(0)}^s(L) \cup \dots \cup X_{(r)}^s(L), \end{aligned}$$

где правые части представляют собой объединения *непересекающихся* открытых множеств и стационарные подгруппы всех геометрических точек множеств $X_{(i)}^s(\text{Pre})$ и $X_{(i)}^s(L)$ имеют размерность i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. $X_{(0)}^s(L)$ называется множеством *строго стабильных* (по отношению к σ , L , ϕ) точек.

(2) Заметим, что, когда схема X собственна над k и пучок L обилен, требование аффинности схемы X_s излишне. Кроме того, в любом случае пучок L будет обилен, если его ограничить на множество $X^{ss}(L)$ (см. условие (b) теоремы 4.5.2 из EGA 2).

(3) Напомним, что множество всех сечений $s \in H^0(X, L^n)$, для которых множество X_s аффинно, образует в $H^0(X, L^n)$ линейное подпространство. Это следует, например, из условия (b) теоремы 4.5.1, EGA 2. Это же верно для множества инвариантных сечений с аффинным множеством X_s . Обозначим это

¹⁾ Отсутствие морфизма ϕ оправдывается следствием 1.17.

множество через V_n . Так как $X_{st} = X_s \cap X_t$ и X_{st} аффинно, если оба множества X_s и X_t аффинны, то пространство $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ будет кольцом¹⁾. Это кольцо играет в общем случае роль аффинного кольца инвариантов.

(4) Четвертое понятие «предполустабильности», которое следовало бы из соображений симметрии включить в наши определения, нами опущено, поскольку оно в действительности бесполезно.

Предложение 1.9. Пусть X — алгебраическая предсхема над полем k и G — редуктивная алгебраическая группа, действующая на X . Тогда существует универсальный геометрический фактор (Y, ϕ) множества $X^s(\text{Pre})$ по группе G . Морфизм ϕ будет при этом аффинным, а предсхема Y — алгебраической. Обратно, если $U \subset X$ — любое такое открытое инвариантное множество, что существует его геометрический фактор (Z, ψ) по группе G и морфизм ψ аффинен, то $U \subset X^s(\text{Pre})$.

Мы опускаем доказательство, так как это предложение в высшей степени очевидно и никогда не будет использоваться в дальнейшем. Между прочим, условие аффинности морфизма ϕ в обратном утверждении можно в силу предложения 0.5 заменить более сильным предположением: «группа G действует на схеме X собственнo». Оно выглядит более подходящим, поскольку является по сути топологическим условием.

Трудность, возникающая в связи с этим предложением, состоит в том, что даже когда схема X проективна, Y может быть весьма неотделимой предсхемой. По этой причине гораздо полезнее

Теорема 1.10. Пусть X — алгебраическая предсхема над полем k и G — редуктивная алгебраиче-

¹⁾ Это верно, несмотря на то, что X не является схемой. В самом деле, если $s \in H^0(X, L^n)$, $t \in H^0(X, L^m)$, то X_{st} — открытое подмножество аффинного пространства X_s , состоящего из точек, в которых функция t^n/s^m отлична от 0.

ская группа, действующая на X . Предположим, что L есть G -линеаризованный обратимый пучок на схеме X . Тогда существует универсальный категорный фактор (Y, ϕ) схемы $X^{ss}(L)$ по группе G . Кроме того,

(i) ϕ — аффинный и универсально субмерсивный морфизм,

(ii) на Y существует такой обильный обратимый пучок M , что $\phi^*(M) \cong L^n$ для некоторого n ; таким образом, Y — квазипроективная алгебраическая схема,

(iii) существует такое открытое подмножество $\tilde{Y} \subset Y$, что $X^s(L) = \phi^{-1}(\tilde{Y})$ и пара $(\tilde{Y}, \phi|_{X^s(L)})$ является универсальным геометрическим фактором схемы $X^s(L)$ по группе G .

Доказательство. Поскольку схема X нётерова, найдется такое N и такое конечное семейство $s_1, \dots, s_n$ инвариантных сечений пучка L^N , что мно-

жества $U_i = X_{s_i}$ аффинны и $X^{ss}(L) = \bigcup_{i=1}^n U_i$. В силу

теоремы 1.1 существуют универсальные категорные факторы (V_i, ϕ_i) множеств U_i по группе G . Наш первый шаг состоит в том, чтобы соединить аффинные схемы V_i в единую предсхему. Рассмотрим для каждой пары целых чисел (i, j) ($1 \leq i, j \leq n$) отношение s_j/s_i как функцию в открытом множестве U_i , в котором $s_i \neq 0$. Оно является инвариантным элементом кольца $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. Так как множества V_i суть категорные факторы множеств U_i по G , то $\Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ есть в точности кольцо инвариантов из $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. Следовательно, отношение s_j/s_i индуцируется некоторой функцией $\sigma_{ij} \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$. Положим $V_{ij} = V_i \setminus \{y; \sigma_{ij}(y) = 0\}$. Тогда

$$\phi_i^{-1}(V_{ij}) = U_i \cap U_j = \phi_j^{-1}(V_{ji}).$$

Поскольку схема V_i (соответственно V_j) — универсальный категорный фактор множества U_i (соответственно U_j), то обе схемы V_{ij} и V_{ji} суть категорные

факторы множества $U_i \cap U_j$ и поэтому существует *единственный* изоморфизм $\psi_{ij}: V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U_i \cap U_j & \\ \phi_i \swarrow & & \searrow \phi_j \\ V_{ij} & \xrightarrow{\psi_{ij}} & V_{ji} \end{array}$$

Из единственности легко следует, что построенное семейство отождествлений склеивает схемы $\{V_i\}$ в предсхему Y , содержащую каждую схему V_i в качестве открытого аффинного подмножества. Кроме того, очевидно, что морфизмы ϕ_i склеиваются в аффинный и универсально субмерсивный морфизм ϕ из $X^{ss}(L)$ в Y , для которого $\phi^{-1}(V_i) = U_i$.

Второй шаг начнем с замечания, что набор функций $\sigma_{ij}|_{V_{ij}}$ образует по Чеху одномерный коцикл покрытия $\{V_i\}$ предсхемы Y со значениями в пучке $\mathcal{O}_Y^*$. Следовательно, эти функции определяют на схеме Y обратимый пучок M . Ясно, кроме того, что $L^N = \phi^*(M)$. Я утверждаю, что пучок M обилен на Y в смысле теоремы 4.5.2, EGA 2. Чтобы показать это, используем условие (а') этой теоремы, т. е. то обстоятельство, что функция σ_{ij} при фиксированном j и переменном i представляют собой такой набор функций, по одной на каждом множестве V_i , что на пересечении $V_{i_1} \cap V_{i_2}$ справедливо равенство

$$\sigma_{i_2, j} = \sigma_{i_1, j} \cdot \sigma_{i_2, i_1}.$$

Таким образом, этот набор определяет сечение t_j пучка M . Ясно, кроме того, что $s_j = \phi^*(t_j)$. Следовательно, для любой точки $x \in X^{ss}(L)$

$$s_j(x) = 0 \Leftrightarrow t_j(\phi(x)) = 0.$$

Итак, $V_j = Y_{t_j} = Y \setminus \{y; t_j(y) = 0\}$. Поскольку множества V_i аффинны, упомянутое условие (а') проверено. На основании замечания, следующего за теоре-

мой 4.5.2, заключаем, что предсхема Y на самом деле является схемой и пучок M обилен на Y .

Наконец, мы можем считать, при необходимости расширяя семейство s_i , что при $i \in I \subset \{1, \dots, n\}$ действие σ группы G на множестве U_i замкнуто и

$$X^s(L) = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Тогда $X^s(L) = \phi^{-1} \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right)$. Полагая $\tilde{Y} = \bigcup_{i \in I} V_i$, видим, что оставшаяся часть теоремы о том, что Y (соответственно $\tilde{Y}$) — универсальный категорный фактор (соответственно универсальный геометрический фактор) схемы $X^{ss}(L)$ (соответственно $X^s(L)$) по группе G , следует из замечания 7 § 0.2. $\square$

ОБОБЩЕНИЕ 1.11. Пусть в ситуации предыдущей теоремы x — геометрическая точка множества $X^{ss}(L)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) точка x принадлежит $X^s(L)$,
- 2) точка x регулярна по отношению к действию группы G , и ее орбита $O(x)$ замкнута в множестве $\overline{X^{ss}(L)} = X^{ss}(L) \times_k \Omega$,

- 3) точка x регулярна по отношению к действию группы G , и существует такое инвариантное сечение $s \in H^0(L^n)$, что $s(x) \neq 0$, схема X_s аффинна и орбита $O(x)$ замкнута в $\overline{X_s}$.

Более того, если $x_1, \dots, x_n$ — конечное множество геометрических точек из $X^{ss}(L)$, то найдется такое инвариантное сечение $s \in H^0(X, L^m)$ (при некотором m), что схема X_s аффинна и $s(x_i) \neq 0$ при всех i . Если к тому же все точки $x_1, \dots, x_n$ стабильны, то можно считать, что действие группы G на множестве X_s замкнуто.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Во-первых, из существования геометрического фактора схемы $X^s(L)$ по группе G вытекает, что точка x регулярна по отношению к действию группы G (см. замечание 4 § 0.2). Я утверждаю, что, во-вторых, в множестве $\overline{X^{ss}(L)}$

выполняется равенство $O(x) = \phi^{-1}(\phi(x))$. Действительно, $\overline{X^s(L)} = \phi^{-1}(\bar{Y})$ и потому $\phi^{-1}(\phi(x)) \subset \overline{X^s(L)}$; если $y \in \overline{X^s(L)}$, то $\phi(x) = \phi(y)$ в том и только в том случае, когда $y \in O(x)$, ибо $\bar{Y}$ — геометрический фактор схемы $\overline{X^s(L)}$ по G . Следовательно, орбита $O(x)$ замкнута в множестве $\overline{X^{ss}(L)}$.

Импликация $2) \Rightarrow 3)$ очевидна.

$3) \Rightarrow 1)$. Пусть $s \in H^0(L^n)$ — такое же инвариантное сечение, как и в замечании 3). Построим такую инвариантную функцию $f \in H^0(X_s, \mathcal{O}_X)$, что $f(x) \neq 0$ и действие группы G на множестве $(X_s)_f$ замкнуто. Тогда $s^m \cdot f$ будет при некотором m инвариантным сечением пучка L^{nm} и множество $(X_s)_f = X_{s^m \cdot f}$ будет содержаться в $X^s(L)$. Это доказывает 1). Введем для построения функции f замкнутые подмножества S_r схемы X_s , состоящие из точек, в которых стационарная подгруппа имеет размерность по меньшей мере r . Допустим, что $x \in \bar{S}_r \setminus \bar{S}_{r+1}$, и положим

$$Z_1 = S_{r+1} \cup \{\text{замыкание множества } S_0 \setminus S_r\},$$

$$Z_2 = O(x).$$

Из регулярности точки x вытекает, что $\bar{Z}_1$ и $\bar{Z}_2$ — непересекающиеся замкнутые инвариантные подмножества в $\bar{X}_s$. Найдется, следовательно, инвариант $\bar{f} \in \Gamma(\bar{X}_s, \mathcal{O}_{\bar{X}})$, равный 0 на множестве $\bar{Z}_1$ и 1 на $\bar{Z}_2$.

Запишем $\bar{f} = \sum_{i=1}^N f_i \otimes \alpha_i$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — элементы поля Ω , линейно независимые над k , а $f_1, \dots, f_N$ — функции из $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_X)$. Получаем, что функции f_i инвариантны, и, более того, поскольку множество $\bar{Z}_1$ получается из замкнутого подмножества Z_1 расширением базы Ω/k , все они равны 0 на Z_1 . Наконец, из равенства $\bar{f}(x) = 1$ находим, что $f_i(x) \neq 0$ при некотором i . Функция f_i может быть взята в качестве кандидата для функции f . Нужно лишь заметить, что, так как $\bar{f} = 0$ на множестве Z_1 , то каждая орбита множества $(X_s)_f$ имеет одну и ту же размерность и

в силу этого действие группы G на множестве $(X_s)_f$ замкнуто.

Для доказательства последнего утверждения отметим, что по определению существует такое семейство инвариантных сечений $s_i \in H^0(X, L^N)$, что схемы X_{s_i} аффинны и $s_i(x_i) \neq 0$. Если основное поле k бесконечно, то найдутся такие константы $\alpha_i \in k$, что сечение $\sum \alpha_i \cdot s_i$ отлично от нуля в любой из точек x_i ; если же поле k конечно, то можно все же найти такой однородный полином $P(X_1, \dots, X_n)$, что сечение $P(s_1, \dots, s_n)$ отлично от нуля в любой из точек x_i . В любом случае в силу замечания (3), сделанного в начале параграфа, множество $X_{\sum \alpha_i s_i}$ или $X_{P(s_1, \dots, s_n)}$ будет аффинным. Если, наконец, все точки x_i стабильны, то можно считать, что действие σ замкнуто на множествах X_{s_i} : размерности стационарных подгрупп точек из X_{s_i} будут в этой ситуации постоянны на связных компонентах схем X_{s_i} . Это же верно, следовательно, на множестве $\bigcup X_{s_i}$ и потому на $X_{\sum \alpha_i s_i}$ или $X_{P(s_1, \dots, s_n)}$. Итак, действие замкнуто и на этих множествах. $\square$

Другое интересное обстоятельство в связи с теоремой 1.10 состоит в том, что, когда схема X собственна над k и пучок L обилен на X , то категорный фактор Q схемы $X^{ss}(L)$ по G будет также собственным над k . Таким образом, этот категорный фактор служит компактификацией более содержательного с топологической точки зрения геометрического фактора схемы $X^s(L)$ по G . Так как этот результат не будет использоваться, мы опускаем доказательство, сказав лишь, что оно вытекает из интерпретации схемы Q как $\text{Proj}(R_0)$, где R_0 — подкольцо в $\sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, L^n)$, образованное инвариантными сечениями.

ОБРАЩЕНИЕ 1.12. Пусть G — редуktивная алгебраическая группа, действующая на алгебраической предсхеме X . Если категорный фактор (Y, ϕ) схемы X

по группе G существует, ϕ — аффинный морфизм и схема Y квазипроективна, то $X = X^{ss}(L)$ при некотором $L \in \text{Pic}^G(X)$. Кроме того, если (Y, ϕ) — геометрический фактор схемы X по группе G , то $X = X^s(L)$.

Доказательство. Пусть M — обильный обратимый пучок на схеме Y . Как указывалось в § 3, пучок $L = \phi^*(M)$ несет тогда каноническую G -линеаризацию, обладающую тем свойством, что все сечения вида $\phi^*(s)$, $s \in H^0(Y, M^n)$, суть инвариантные сечения пучка L^n . Поскольку схема Y покрывается открытыми аффинными множествами Y_s с подходящими сечениями s пучка M^n , то схема X покрывается открытыми аффинными множествами $\phi^{-1}(Y_s) = X_{\phi^*(s)}$. Следовательно, $X = X^{ss}(L)$. Если (Y, ϕ) — геометрический фактор, действие группы G на X замкнуто по лемме 0.6 и потому $X = X^s(L)$. $\square$

Однако для применений это обращение бывает, как правило, слишком слабым. Предположим, что имеется предсхема X , на которой действует группа G . Интересен вопрос о классификации тех открытых инвариантных подмножеств U из X , для которых существует фактор U/G . Приведенное выше обращение связывает этот вопрос с рассмотрением G -линеаризованных пучков L на U и открытых множеств $U^s(L)$. Гораздо интереснее найти связь с открытыми множествами $X^s(L)$, которые в некоторых случаях можно построить без предварительного анализа всевозможных открытых инвариантных множеств U . Наиболее полезным в этом направлении является

ОБРАЩЕНИЕ 1.13. Пусть X — связная алгебраическая предсхема, гладкая над полем k , и пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, действующая на схеме X . Для открытого инвариантного подмножества U из X следующие условия эквивалентны:

- i) $U \subset X^s(L)$ для некоторого $L \in \text{Pic}^G(X)$,
- ii) существует геометрический фактор (Y, ϕ) схемы U по группе G с аффинным морфизмом ϕ и квазипроективной схемой Y .

Если стационарная подгруппа общей точки схемы X нульмерна, то условия i) и ii) эквивалентны условию iii) действие группы G на схеме U собственно и существует геометрический фактор (Y, ϕ) схемы U по группе G с квазипроективной схемой Y .

Доказательство. Из iii) следует ii) в силу предложения 0.7. Условие ii) влечет за собой iii) в силу обращения 1.12 и следствия 2.5 (которое еще будет доказано). По теореме 1.10 из i) вытекает ii). Осталось показать, что из ii) следует i). Прежде всего, в силу обращения 1.12 на схеме U найдется такой G -линеаризованный обратимый пучок L , что $U = U^s(L)$. Ввиду гладкости схемы X на ней непременно найдется обратимый пучок, продолжающий пучок L : выберем такое продолжение и обозначим его также через L . Пусть $D_1, \dots, D_k$ — компоненты коразмерности 1 схемы $X \setminus U$. Положим для очень большого N , в дальнейшем фиксированного,

$$L' = L \left[N \sum_{i=1}^k D_i \right].$$

Это также обратимый пучок благодаря гладкости схемы X . Заметим, что G -линеаризация $\phi: \sigma^*L \rightarrow p_2^*L$ над схемой $G \times U$ продолжается до G -линеаризации пучка L над всей схемой $G \times X$. В самом деле, морфизм ϕ отвечает ненулевому сечению ψ пучка $p_2^*L \otimes (\sigma^*L)^{-1}$ над множеством $G \times U$. Так как группа G связна, единственными неприводимыми компонентами коразмерности 1 схемы $G \times X \setminus G \times U$ будут $G \times D_1, \dots, G \times D_k$. Предположим, что порядок сечения ψ по отношению к дивизору $G \times D_i$ равен k_i ¹⁾. Тогда сечение ψ продолжается до ненулевого сечения пучка $p_2^*(L) \otimes (\sigma^*L)^{-1} \left[- \sum_{i=1}^k k_i (G \times D_i) \right]$. Следовательно, морфизм ϕ продолжается до изоморфизма пучков σ^*L и

¹⁾ Здесь имеется в виду значение нормирования, отвечающего дивизору $G \times D_i$. — Прим. перев.

$p_2^*L \left[-\sum_{i=1}^k k_i (G \times D_i) \right]$. Но при ограничении на под-
схему $\{e\} \times X$ морфизм ϕ продолжается до изомор-
физма пучков L и $L \left[-\sum_{i=1}^k k_i D_i \right]$. Поскольку он удо-
влетворяет условию коцикла, его ограничение на под-
схему $\{e\} \times U$ должно быть тождественным отобра-
жением из L в L . Таким образом, все числа k_i равны
нулю. Отсюда получаем, что исходный морфизм ϕ
продолжается до изоморфизма пучков σ^*L и p_2^*L , и,
так как условие коцикла выполняется в общей точке,
 ϕ удовлетворяет ему всюду над $G \times X$. По анало-
гичным причинам морфизм ϕ продолжается также
до G -линеаризации пучка L' .

Мы утверждаем теперь, что если N достаточно
велико, то $X^s(L') \supset U$. Пусть x — геометрическая точка
множества U . Тогда для некоторого n существует
такое инвариантное сечение $s \in H^0(U, L^n)$, что $s(x) \neq 0$,
схема U_s аффинна и действие группы G на схеме U_s
замкнуто. Но если N достаточно велико, то сечение s
продолжается до сечения $t \in H^0(X, L'^n)$. Увеличивая
еще число N , можно добиться того, чтобы сечение t
обращалось в нуль на всех дивизорах D_i . Так как
 s — инвариант, получаем, что t — также инвариант.
Наконец, я утверждаю, что $X_t = U_s$. Конечно, мы
имеем

$$U_s \subset X_t \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i.$$

Вообще, если V — открытое аффинное подмножество
схемы Z , гладкой над k , то все компоненты множе-
ства $Z \setminus V$ имеют коразмерность 1. Итак, все ком-
поненты схемы $X_t \setminus U_s$ суть подмножества коразмер-
ности 1 в $X \setminus U$. Поскольку все дивизоры D_i нахо-
дятся вне множества X_t , таких подмножеств нет и
 $X_t = U_s$. Следовательно, x — стабильная точка схемы X
по отношению к пучку L' . $\square$

В трех последних предложениях § 4 будет пока-
зано, что свойство стабильности сохраняется при не-

которых изменениях входящих в его определение объектов X , G , L и k .

Предложение 1.14. Пусть X — алгебраическая предсхема над полем k , G — редуктивная алгебраическая группа, действующая на схеме X и L — некоторый G -линеаризованный обратимый пучок X . Пусть $K \supset k$ — произвольное расширение. Тогда, если $\bar{X} = X \times_k K$ и $\bar{L}$ — пучок на схеме $\bar{X}$, индуцированный пучком L , то

$$\begin{aligned}\bar{X}^s(\bar{L}) &= \overline{X^s(L)}, \\ \bar{X}^{ss}(\bar{L}) &= \overline{X^{ss}(L)}.\end{aligned}$$

Доказательство. Ввиду условия (2) обобщения 1.11 множество $X^s(L)$ характеризуется как подмножество в $X^{ss}(L)$ геометрическим условием. Таким образом, если результат доказан для $X^{ss}(L)$, то он получается и для $X^s(L)$.

Чтобы получить его для множества $X^{ss}(L)$, очевидно, достаточно рассмотреть два случая: (i) поле K алгебраически замкнуто и расширение K/k сепарабельно и (ii) расширение K/k чисто несепарабельно. Рассмотрим сначала первый случай. Пусть $V_n \subset H^0(X, L^n)$ — подпространство таких инвариантных сечений s , что схема X_s аффинна; пусть $\bar{V}_n$ — аналогичное подпространство в $H^0(\bar{X}, \bar{L}^n)$. Из свойства плоскости замены базы K/k находим, что

$$H^0(\bar{X}, \bar{L}^n) \cong H^0(X, L^n) \otimes_k K.$$

Подпространство $\bar{V}_n$ имеет тогда наименьшее поле определения L , причем $K \supset L \supset k$. Но если τ — любой автоморфизм поля K над k , то он перестановочен с действием группы G и G -линеаризацией пучка L и потому переводит инвариантные сечения из $H^0(\bar{X}, \bar{L}^n)$ в инвариантные. Кроме того, если схема $\bar{X}_s$ аффинна, то аффинна и схема $(\bar{X})_{s\tau} = (\bar{X}_s)^\tau$. Следовательно, отображение τ переводит пространство $\bar{V}_n$ в себя.

Согласно Картье ([18], гл. I), это означает, что автоморфизм τ оставляет поле L поточечно на месте. В силу наших предположений о расширении K/k отсюда следует, что $L = k$. Итак, $\bar{V}_n = V'_n \otimes_k K$ для некоторого подпространства $V'_n \subset H^0(X, L^n)$. Но сечение $s \in H^0(X, L^n)$ инвариантно и схема X_s аффинна в том и только том случае, когда s инвариантно как сечение из $H^0(\bar{X}, \bar{L}^n)$ и схема $(\bar{X})_s = (X_s) \times_k K$ аффинна (см. SGA 8, следствие 5.6). Таким образом, $V'_n = V_n$. Наконец, множество $X \setminus X^{ss}(L)$ (соответственно $\bar{X} \setminus \bar{X}^{ss}(\bar{L})$) представляет собой множество общих нулей всевозможных сечений из всех пространств V_n (соответственно $\bar{V}_n$). Поскольку V_n порождает пространство $\bar{V}_n$, получаем требуемое.

Предположим теперь, что расширение K/k чисто несепарабельно. Результат выводится немедленно, благодаря тому, что если $s \in H^0(\bar{X}, \bar{L}^n)$, то при некотором v s^{p^v} — сечение пучка $L^{n \cdot p^v}$ на предсхеме X и

$$(\bar{X}_s) = (X_{s^{p^v}}) \times_k K.$$

Предложение 1.15. Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует с помощью отображения σ на алгебраической предсхеме X , и пусть L есть G -линеаризованный обратимый пучок на X . Если G_0 — связная компонента единицы группы G , то открытые множества стабильных (соответственно полустабильных) точек относительно действий групп G и G_0 совпадают.

Доказательство. На основании предложения 1.14 достаточно разобрать случай, когда основное поле k алгебраически замкнуто. Кроме того, ввиду обобщения 1.11 достаточно доказать предложение для полустабильных точек. Пусть U (соответственно U_0) — открытое множество полустабильных точек относительно группы G (соответственно группы G_0). Очевидно, $U \subset U_0$. Заметим, далее, что множество U_0

инвариантно относительно действия как группы G , так и группы G_0 . Действительно, если $\alpha \in G_k$ и сечение $s \in H^0(X, L^n)$ является G_0 -инвариантным, то с помощью G -линеаризации пучка L можно определить сечение s^α , которое будет все еще G_0 -инвариантно, ибо G_0 — нормальный делитель в G . Отсюда и из равенства $\sigma(\alpha, X_s) = X_{(s^\alpha)}$ вытекает, что множество U_0 инвариантно относительно морфизма α и, следовательно, относительно группы G .

Пусть теперь x — произвольная k -рациональная точка множества U_0 . Обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ представители классов смежности из G/G_0 . Применяя вторую часть обобщения 1.11 к конечному множеству точек $\sigma(\alpha_i, x)$, находим, что для некоторого n существует такое G_0 -инвариантное сечение s пучка L^n , что оно отлично от нуля в любой из точек $\sigma(\alpha_i, x)$ и что схема X_s аффинна. Положим теперь $s' = \prod_{i=1}^N s^{\alpha_i}$. Тогда s' есть G -инвариантное сечение пучка L^{nN} , $s'(x) \neq 0$ и схема

$$X_{s'} = \bigcap_{i=1}^N \sigma(\alpha_i, X_s)$$

аффинна. Таким образом, $x \in U$. $\square$

Предложение 1.16. Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует с помощью отображения σ на алгебраической предсхеме X , и пусть L есть G -линеаризованный обратимый пучок на X . Если $f: X_{\text{red}} \rightarrow X$ — каноническое вложение, то

$$X^{ss}(L) = X_{\text{red}}^{ss}(f^*L),$$

$$X^s(L) = X_{\text{red}}^s(f^*L).$$

Доказательство. Включение « $\subset$ » очевидно. Чтобы доказать обратное включение, начнем с выбора такого инвариантного сечения $s \in H^0(X_{\text{red}}, f^*L^n)$, что схема $[X_{\text{red}}]_s$ аффинна. Достаточно показать, что при некотором k сечение s^k поднимается до инвариантного сечения t из $H^0(X, L^{nk})$, поскольку отсюда

автоматически вытекает, что схема X , аффинна. По лемме 4.5.13.1 из EGA 2 найдется такое положительное целое число k , что s^k поднимается до сечения t пучка L^{nk} над схемой X . На пространстве $H^0(X, L^{nk})$ задано двойственное действие группы G и имеется, следовательно, оператор Рейнольдса E . Сечение Et будет инвариантным, а его ограничение на схему X_{red} совпадает с сечением s^k . $\square$

Следствие 1.17. *Если в ситуации предыдущего предложения y связной компоненты группы $\bar{G}$ нет гомоморфизмов на группу $\bar{G}_m$, то множества $X^{ss}(L)$ и $X^s(L)$ не зависят от выбора G -линеаризации пучка L .*

Доказательство. Это следует из предложений 1.4, 1.14, 1.15 и 1.16.

§ 5. Функториальные свойства

В этом разделе мы будем иметь дело со следующей ситуацией: $f: X \rightarrow Y$ есть G -линейный морфизм между двумя алгебраическими предсхемами, на которых действует группа G . Кроме того, $M \in \text{Pic}^G(Y)$. Каково соотношение между множествами

$$X_{(0)}^s(f^*M) \quad \text{и} \quad f^{-1}\{Y_{(0)}^s(M)\}?$$

Большинство наших результатов справедливы также для полустабильных и стабильных точек, однако для простоты мы ограничимся рассмотрением открытых множеств строго стабильных точек.

Предложение 1.18. *Если в описанной ситуации f — квазиаффинный морфизм, то*

$$X_{(0)}^s(f^*M) \supset f^{-1}\{Y_{(0)}^s(M)\}.$$

Доказательство. Ввиду предложения 1.14 достаточно показать это при дополнительном предположении, что основное поле k алгебраически замкнуто. Пусть теперь x — замкнутая точка на $f^{-1}\{Y_{(0)}^s(M)\}$; нам нужно установить, что $x \in X_{(0)}^s(f^*M)$. Так как

точка $f(x)$ строго стабильна, для некоторого n найдется такое инвариантное сечение $t \in H^0(Y, M^n)$, что схема Y_t аффинна, $f(x) \in Y_t$ и стационарные подгруппы всех k -рациональных точек из Y_t нульмерны. Пусть $s = f^*t$ — индуцированный элемент пространства $H^0(X, (f^*M)^n)$. Сечение s также инвариантно, $x \in X_s$ и стационарные подгруппы всех k -рациональных точек схемы X_s нульмерны, но схема X_s не обязательно аффинна. Именно, схема $X_s = f^{-1}(Y_t)$, вообще говоря, лишь квазиаффинна. Положим

$$R = \Gamma(X_s, \mathcal{O}_X),$$

$$\tilde{X} = \text{Spec}(R).$$

Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} x \in X_s & \xrightarrow{I} & \tilde{X} \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & Y_t & \end{array}$$

в которой I — открытое вложение (предложение 5.1.2, часть (b), EGA 2). Более того, поскольку группа G действует на схеме X_s , имеется ее двойственное действие на кольце R и, следовательно, на схеме $\tilde{X}$. Ясно, что построенные выше морфизмы G -линейны. Заметим, что из G -линейности отображения $\tilde{f}$ вытекает, что стационарные подгруппы всех геометрических точек схемы $\tilde{X}$ нульмерны. Таким образом, действие группы G на схеме $\tilde{X}$ замкнуто. Пусть

$$Z_1 = \tilde{X} \setminus I(X_s),$$

$$Z_2 = \mathcal{O}(x).$$

Тогда Z_1 и Z_2 — непересекающиеся замкнутые инвариантные подмножества в $\tilde{X}$. По следствию 1.2 найдется инвариант $f \in R$, равный 0 на Z_1 и 1 в точке x . Получаем отсюда, что $(\tilde{X})_f \subset X_s$ и схема $(\tilde{X})_f$ аффинна. В силу теоремы 1.3.1 EGA 1 существует такое целое k , что сечение $s^k \cdot f$ пучка $(f^*M)^{nk}$ над схемой X_s

продолжается до сечения s' этого пучка над схемой X . Пусть, наконец, E — оператор Рейнольдса на пространстве $H^0(X, (f^*M)^{nk})$. Сечение Es' инвариантно и совпадает на открытом множестве X_s с инвариантным сечением $s^k \cdot f$. Тогда сечение $(s \cdot Es')^1$ равно нулю как вне множества X_s , так и в тех его точках, где $f=0$. Следовательно, множество $X_{(s \cdot Es')}$ является аффинной окрестностью точки x , содержащейся в X_s , и, так как сечение $s \cdot Es'$ инвариантно и все стационарные подгруппы множества X_s нульмерны, получаем, что точка x строго стабильна. $\square$

Следующий вопрос таков: когда множество $X_{(0)}^s(f^*M)$ целиком совпадает с множеством $f^{-1}\{Y_{(0)}^s(M)\}$? Кажется разумным предположение, что они равны хотя бы когда морфизм f конечен. К сожалению, это неверно. Нужно лишь рассмотреть следующую ситуацию: $x \in X_k$ и $f = \psi_x: G \rightarrow X$. Если орбита $O(x)$ замкнута и стационарная подгруппа $S(x)$ нульмерна, то из леммы 0.3 следует, что морфизм f конечен. Однако $\psi_x^*(L) \cong o_G$ и ясно, что

$$G_{(0)}^s(o_G) = G.$$

Но, как мы увидим, почти в каждом примере гл. 4 имеется очень много замкнутых орбит с тривиальными стационарными подгруппами, которые нестабильны. Выполняется, однако, следующая

ТЕОРЕМА 1.19. *Предположим, что в описанной ситуации f — конечный морфизм, схема X собственна над полем k и пучок M обилен на схеме Y (которая не предполагается собственной над k !). Тогда*

$$X_{(0)}^s(f^*M) = f^{-1}\{Y_{(0)}^s(M)\}.$$

Доказательство. На основании предложения 1.7 существуют такое вложение $I: Y \rightarrow \mathbf{P}_n$, дейст-

¹⁾ Эта запись обозначает тензорное произведение сечений пучков. В рассматриваемом случае $s \cdot Es' \in H^0(X, (f^*M)^{n(k+1)})$. — Прим. перев.

вие группы G на пространстве $\mathbf{P}_n$ и G -линеаризация пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$, что отображение I G -линейно и $M' = I^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1))$ (как G -линеаризованный пучок). В силу предложения 1.18 ясно, что если доказать теорему для отображения $I \circ f$, то она будет получена и для отображения f .

Предположим теперь, что $Y = \mathbf{P}_n$ и $M = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. Пусть R — однородное координатное кольцо пространства $\mathbf{P}_n$, S — однородное координатное кольцо схемы X и $f: X \rightarrow \mathbf{P}_n$ — морфизм, определяемый заданием на кольце S структуры градуированной R -алгебры. В силу конечности морфизма f S — конечный R -модуль. Действия группы G на схемах X и $\mathbf{P}_n$ и G -линеаризации пучков $f^*(\mathcal{O}(1))$ и $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ приводят к двойственным действиям группы G на кольцах R и S . Последние совместимы со структурой R -модуля на кольце S . Пусть E и F — операторы Рейнольдса на пространствах R и S соответственно. Допустим теперь, что x — строго стабильная геометрическая точка схемы X . Тогда найдется инвариантный элемент

$$s \in H^0(X, f^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n))) = S_n,$$

для которого $s(x) \neq 0$, орбита точки x замкнута в X , и ее стационарная подгруппа нульмерна. Поскольку S — конечный R -модуль, имеется уравнение целой зависимости

$$s^m + \bar{a}_1 \cdot s^{m-1} + \dots + \bar{a}_m = 0,$$

в котором a_i — однородные элементы кольца R и $\bar{a}_i$ — их образы в S . Применяя оператор F , находим

$$\begin{aligned} 0 &= F\{s^m + \bar{a}_1 \cdot s^{m-1} + \dots + \bar{a}_m\} = \\ &= s^m + F\bar{a}_1 \cdot s^{m-1} + \dots + F\bar{a}_m = \\ &= s^m + \overline{Ea}_1 \cdot s^{m-1} + \dots + \overline{Ea}_m. \end{aligned}$$

Так как $s(x) \neq 0$, отсюда вытекает, что $Ea_i(f(x)) \neq 0$ при некотором i . Итак, $f(x) \in (\mathbf{P}_n)_{Ea_i}$. Но отсюда следует соотношение

$$x \in X_{f^*(Ea_i)} = f^{-1}[(\mathbf{P}_n)_{Ea_i}].$$

На основании обобщения 1.11 орбита точки x замкнута в множестве $X_{f^*(Ea_i)}$ и из собственности морфизма f следует, что орбита точки $f(x)$ замкнута в $(P_n)_{Ea_i}$. Поскольку морфизм f еще и конечен, у орбит точек x и $f(x)$ одна и та же размерность и потому стационарная подгруппа точки $f(x)$ нульмерна. В силу обобщения 1.11 точка $f(x)$ строго стабильна. Это доказывает, что $X_{(0)}^s(f^*o_P(1)) \subset f^{-1}\{(P_n)_{(0)}^s(o_P(1))\}$. Используя предложение 1.18, получаем требуемый результат. $\square$

Следствие 1.20. *Предположим, что редуктивная алгебраическая группа G действует на схеме X , собственной над полем k . Если у связной компоненты группы $\bar{G}$ нет гомоморфизмов на группу $\bar{G}_m$ и если пучок $L \in \text{Pic}^G(X)$ обилен, то множество $X_{(0)}^s(L)$ зависит только от поляризации, определяемой пучком L .*

Доказательство. Это утверждение распадается на два:

(i) $X_{(0)}^s(L_1^p) = X_{(0)}^s(L_1^q)$ для положительных целых p и q и обильного пучка L_1 из $\text{Pic}^G(X)$.

(ii) Если L_1 и L_2 — обильные пучки из $\text{Pic}^G(X)$, алгебраически эквивалентные в группе $\text{Pic}(X)$, то $X_{(0)}^s(L_1) = X_{(0)}^s(L_2)$.

Первое очевидно. Чтобы получить второе, можно на основании предложений 1.14, 1.15 и 1.16 свести все к случаю, когда поле k алгебраически замкнуто, схема X приведена и группа G связна. Можно также предполагать, что схема X нормальна. В самом деле, пусть $\pi: X' \rightarrow X$ — конечный морфизм нормализации схемы X в X . Применяя тогда к отображению π теорему 1.19 и вспоминая, что алгебраически эквивалентные пучки на X индуцируют алгебраически эквивалентные пучки на X' , видим, что достаточно доказать результат для схемы X' .

Пучки L_i определяют k -рациональные точки $\lambda_i \in \text{Pic}(X/k)$. Пусть P — приведенная схема, соответствующая той связной компоненте схемы $\text{Pic}(X/k)$, которая содержит точки λ_1 и λ_2 . Пусть $\mathcal{L}$ — обратимый

пучок на схеме $X \times P$, ограничения которого на замкнутые слои $X \times \{p\}$ изоморфны пучкам L_p , отвечающим точкам p . Если M — достаточно обильный пучок на схеме P , то, заменив $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L} \otimes p_2^*(M)$, можно считать, что пучок $\mathcal{L}$ обилен на схеме $X \times P$. Согласно результату Шевалле [43], P — главное однородное пространство над некоторым абелевым многообразием. Следовательно, действие линейной группы G на схеме P , получающееся из ее действия на X , тривиально. Итак, группа G действует на схеме $X \times P$ как произведение ее действия на X и тривиального действия на P . В силу следствия 1.6 некоторая степень $\mathcal{L}^k$ пучка $\mathcal{L}$ допускает G -линеаризацию. Для каждой k -рациональной точки $p \in P$ теорему 1.19 можно применить к G -линейному морфизму

$$f_p: X \xrightarrow{\sim} X \times \{p\} \subset X \times P.$$

Убеждаемся, что

$$[(X \times P)_{(0)}^s(\mathcal{L})] \cap [X \times \{p\}] = X_{(0)}^s(L_p).$$

В частности, для любой точки $x \in X_k$ те точки $p \in P_k$, для которых точка x строго стабильна по отношению к пучку L_p , образуют множество k -рациональных точек открытого подмножества $U \subset P$. Допустим теперь, что для точки x множество U непусто. Тогда $U = P$. Действительно, если p есть k -рациональная точка из $P \setminus U$, то существует такой конечный набор точек $p_1, \dots, p_N$ из U , что в групповой схеме $\text{Pic}(X/k)$ выполняется равенство

$$p_1 + \dots + p_N = N \cdot p.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} X_{(0)}^s(L_p) &= X_{(0)}^s(L_p^N) = \\ &= X_{(0)}^s(L_{p_1} \otimes \dots \otimes L_{p_N}) \supset \bigcap_{i=1}^N X_{(0)}^s(L_{p_i}). \end{aligned}$$

Из того, что $x \in X_{(0)}^s(L_q)$ для любого $q \in U_k$, выводим, что $x \in X_{(0)}^s(L_p)$, т. е. $p \in U_k$. Итак, $U = P$.

Отсюда вытекает, что множество $X_{(0)}^s(L_p)$ не зависит от p ; в частности, $X_{(0)}^s(L_1) = X_{(0)}^s(L_{\lambda_1}) = X_{(0)}^s(L_{\lambda_2}) = X_{(0)}^s(L_2)$. $\square$

Для удобства применений, рассматриваемых в следующей главе, сделаем одно замечание о полустабильности. Заметим, что предложение 1.18 тривиально верно для множеств X^{ss} и Y^{ss} , когда f — аффинный морфизм; теорема 1.19 также верна для множеств X^{ss} и Y^{ss} , если схема Y *собственна* над полем k . Последнее можно доказать, повторяя слово в слово приведенное выше доказательство и опуская его последнюю часть. В действительности, если использовать дополнительные соображения, то теорему 1.19 для множеств X^{ss} и Y^{ss} можно получить без всяких ограничений; мы, однако, не будем пользоваться этим фактом.

Могло показаться, что введенные в предыдущей главе различные понятия стабильности представляют собой довольно случайные и не имеющие применений понятия. Мы надеемся показать здесь, что это не так. Во-первых, существует эффективный численный критерий стабильности. Почти все наши дальнейшие примеры будут основаны на этом критерии. И, во-вторых, этот критерий приводит к описанию структур в группе, естественным образом связанных с точками, в которых стабильность нарушается: эти структуры суть «выпуклые множества в флаговом комплексе». Эта связь объясняет хорошо известные интуитивные утверждения такого вида:

Если группа $\mathbf{PGL}(n)$ действует на множестве циклов или подсхем пространства $\mathbf{P}_n$ и мы пытаемся построить для этих объектов проективные инварианты, т. е. образовать фактор множества объектов по группе $\mathbf{PGL}(n)$, то мы не в состоянии сделать это, пока не удалим те циклы или подсхемы, которые имеют особенность по отношению к некоторому *флагу* или слишком «плохой» порядок касания с некоторым *флагом*.

Примеры этого будут изложены в гл. 3 и 4.

Поскольку мы будем иметь дело с условиями стабильности для фиксированной геометрической точки, можно с самого начала предположить без потери общности, что основное поле k алгебраически замкнуто. Так как все предсхемы X будут конечного типа над полем k , то множество X_k будет множеством замкнутых точек схемы X .

§ 1. Численный критерий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Однопараметрической подгруппой* группы G называется гомоморфизм $\lambda: G_m \rightarrow G$. Коротче: λ является 1Р-подгруппой группы G .

Предположим теперь, что задано действие σ алгебраической группы G на алгебраической схеме X , собственной над полем k . Пусть x — замкнутая точка схемы X и λ есть 1Р-подгруппа группы G .

Рассмотрим морфизм $\psi_x \circ \lambda$ группы G_m в схему X . Группу G_m можно вложить, отождествляя ее со схемой $\operatorname{Spec} k[\alpha, \alpha^{-1}]$, в аффинную прямую $A^1 = \operatorname{Spec} k[\alpha]$. Отображение $\psi_x \circ \lambda$ продолжается тогда однозначным образом до морфизма $f: A^1 \rightarrow X$. Это следует из нормировочного критерия собственности схемы X над полем k (см. EGA 2, § 7), ибо локальное кольцо схемы A^1 в точке (0) является кольцом нормирования. Замкнутая точка $f(0)$ схемы X будет называться специализацией множества $\sigma(\lambda(\alpha), x)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Ясно, что точка $f(0)$ неподвижна относительно действия группы G_m на X , индуцированного морфизмом λ . Если теперь $L \in \operatorname{Pic}^G(X)$, то можно рассмотреть ограничение индуцированной G_m -линеаризации пучка L на неподвижную точку $f(0)$. Как отмечалось в § 3 гл. 1, это ограничение задается характером группы G_m : скажем, $\chi(\alpha) = \alpha^r$ для $\alpha \in (G_m)_k$. После этих приготовлений мы можем ввести важнейшее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Если группа G действует на алгебраической схеме X , собственной над полем k , и если x — замкнутая точка схемы X , λ есть 1Р-подгруппа группы G и $L \in \operatorname{Pic}^G(X)$, то положим

$$\mu^L(x, \lambda) = -r.$$

Функториальные свойства функции μ таковы:

- i) $\mu^L(\sigma(\alpha, x), \lambda) = \mu^L(x, \alpha^{-1} \cdot \lambda \cdot \alpha)$, если $\alpha \in G_k$,
- ii) при фиксированных x и λ и переменном L функция $\mu^L(x, \lambda)$ определяет гомоморфизм группы $\operatorname{Pic}^G(X)$ в $\mathbb{Z}$,

iii) если $f: X \rightarrow Y$ есть G -линейный морфизм схем, на которых действует группа G , $L \in \text{Pic}^G(Y)$ и $x \in X_k$, то

$$\mu^{f^*L}(x, \lambda) = \mu^L(fx, \lambda),$$

iv) если $\sigma(\lambda(\alpha), x) \rightarrow y$ при $\alpha \rightarrow 0$, то $\mu^L(x, \lambda) = \mu^L(y, \lambda)$.

(Доказательства получаются непосредственно.)

Теорема, которая в конце концов будет доказана, — это

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть редуктивная группа G действует на схеме X , собственной над полем k . Возьмем пучок $L \in \text{Pic}^G(X)$ и предположим, что он обилен. Тогда для точки $x \in X_k$ имеем:

$$x \in X^{ss}(L) \Leftrightarrow \mu^L(x, \lambda) \geq 0 \text{ для всех 1Р-подгрупп } \lambda,$$

$$x \in X_{(0)}^s(L) \Leftrightarrow \mu^L(x, \lambda) > 0 \text{ для всех 1Р-подгрупп } \lambda.$$

Имеются два подхода к доказательству этой теоремы. Либо мы выбираем G -линейное вложение $X \subset \mathbf{P}_{n-1}$ и сводим все к случаю $X = \mathbf{P}_{n-1}$, используя теорему 1.14, либо же мы полагаем схему Y равной нормализации замыкания орбиты $O(x)$ и с помощью канонического отображения $\pi: Y \rightarrow X$ и теоремы 1.14 сводим к случаю, когда орбита $O(x)$ плотна в X . Мы будем следовать первому подходу, ибо он проще и нагляднее. Итак, предположим, что $X = \mathbf{P}_{n-1}$, и пусть

$$V = H^0(\mathbf{P}_{n-1}, \mathcal{O}(1)),$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{V}(V) \text{ — аффинный конус над } \mathbf{P}_{n-1}.$$

У схемы $\mathbf{A}^n \setminus (0)$ имеется естественная проекция на пространство $\mathbf{P}_{n-1}$. Будем говорить, что замкнутая точка $x^* \in \mathbf{A}^n$ лежит над x , если $x^* \neq (0)$ и x^* проектируется в x . Как отмечалось в доказательстве предложения 1.7, действие группы G на пространстве $\mathbf{P}_{n-1}$ и G -линеаризация пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{n-1}}(1)$ определяют вместе

i) двойственное действие группы G на пространстве V ,

ii) линейное действие σ^* группы G на схеме A^n , совместимое с действием σ (относительно проекции $A^n \setminus (0) \rightarrow P_{n-1}$).

Первым шагом будет

Предложение 2.2. *Точка x полустабильна в том и только том случае, когда точка (0) не принадлежит замыканию орбиты $O(x^*)$ какой-нибудь (и, следовательно, любой) замкнутой точки x^* , лежащей над x . Точка x строго стабильна в том и только том случае, когда для какой-нибудь (и, следовательно, для любой) замкнутой точки x^* , лежащей над x , отображение ψ_{x^*} является собственным.*

Доказательство. Точка x по определению полустабильна тогда и только тогда, когда существует такой инвариант $s \in H^0(P_{n-1}, \mathcal{O}_P(k))$, что $s(x) \neq 0$. Это эквивалентно существованию такой инвариантной однородной полиномиальной функции F на пространстве A^n , что $F(x^*) \neq 0$. Но если такая функция существует, то она равна на орбите $O(x^*)$ ненулевой константе и потому точка (0) не может принадлежать замыканию множества $O(x^*)$. Допустим, наоборот, что (0) не принадлежит замыканию орбиты $O(x^*)$. Множества

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{\text{замыкание орбиты } O(x^*)\}, \\ Z_2 &= \{(0)\} \end{aligned}$$

будут тогда непересекающимися замкнутыми инвариантными подмножествами в A^n . На основании следствия 1.2 и редуктивности группы G найдется инвариантная функция F' на A^n , для которой $F' = 0$ на Z_2 и $F' = 1$ на Z_1 . Напишем разложение

$$F' = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_l},$$

в котором каждая функция F_{k_i} однородна степени k_i . Все целые k_i положительны, т. е. каждая функция F_{k_i} равна нулю на множестве Z_2 . Кроме того, некоторая функция F_{k_i} не равна нулю в точке x^* . Пусть $F = F_{k_i}$.

По определению точка x строго стабильна тогда и только тогда, когда ее стационарная подгруппа

конечна и для какого-нибудь (и, следовательно, для любого) сечения $s \in H^0(\mathbf{P}_{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(k))$, такого же, как и выше, орбита $O(x)$ замкнута в множестве $[\mathbf{P}_{n-1}]_s$ (см. обобщение 1.9). Иначе можно сказать, что отображение

$$\psi'_x: G \rightarrow [\mathbf{P}_{n-1}]_s$$

является собственным. Пусть сечению s соответствует так же, как и выше, инвариантная однородная функция F на пространстве $\mathbf{A}^n$. Для некоторого ненулевого элемента $\alpha \in k$ орбита $O(x^*)$ содержится тогда в замкнутой подсхеме Z_α пространства $\mathbf{A}^n$, определенной уравнением $F = \alpha$. Следовательно, морфизм

$$\psi_{x^*}: G \rightarrow \mathbf{A}^n$$

будет собственным тогда и только тогда, когда собственно отображение

$$\psi'_{x^*}: G \rightarrow Z_\alpha.$$

Проекция схемы $\mathbf{A}^n \setminus (0)$ в пространство $\mathbf{P}_{n-1}$ задает морфизм $\pi: Z_\alpha \rightarrow \mathbf{P}_{n-1}$. Тогда $\pi(Z_\alpha) \subset [\mathbf{P}_{n-1}]_s$, и если обозначить через π' морфизм π , но с образом $[\mathbf{P}_{n-1}]_s$, то π' — собственный морфизм. (Пусть $R = \Gamma(\mathbf{A}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{A}})$ и k — степень полинома F . Тогда $Z_\alpha = \text{Spec}(R/(F - \alpha))$ и $[\mathbf{P}_{n-1}]_s \cong \text{Spec}(R(k)/(F - \alpha))$. Но $R/(F - \alpha)$ — конечный модуль над кольцом $R(k)/(F - \alpha)$.) Наконец, $\psi'_x = \pi' \circ \psi'_{x^*}$ и потому отображение ψ'_x собственно в том и только том случае, когда собственно отображение ψ'_{x^*} . $\square$

Следующий шаг состоит в интерпретации функции μ , когда ее пространство определения X равно $\mathbf{P}_{n-1}$. Напомним, что линейное действие тора на аффинном пространстве можно диагонализировать (см. семинар Шевалле [41], доклад 4, или [2]). Иными словами, замкнутые точки $(\alpha) \in (\mathbf{G}_m)^r_k$ действуют в подходящей системе координат пространства $\mathbf{A}^n$ как диагональные матрицы $[\chi_i(\alpha) \cdot \delta_{ij}]$, где $\chi_1, \dots, \chi_n$ — характеры группы $(\mathbf{G}_m)^r$. Напомним, кроме того, что если $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, то каждый характер χ группы

$(G_m)^r$ имеет вид

$$\chi(\alpha) = \prod_{i=1}^r \alpha_i^{m_i}$$

для подходящих целых m_i . Предположим, что, в частности, задано действие группы G_m на пространстве P_{n-1} и G_m -линеаризация пучка $\mathcal{O}(1)$. Это дает линейное действие группы G_m на конусе A^n , причем действие элемента $\alpha \in (G_m)_k$ выражается в соответствующих координатах матрицей $(\alpha^{r_i} \cdot \delta_{ij})$ с фиксированными целыми числами $r_1, \dots, r_n$.

Предложение 2.3. Пусть x — замкнутая точка пространства P_{n-1} , λ является $1P$ -подгруппой в G и множество $\sigma(\lambda(\alpha), x)$ специализируется при $\alpha \rightarrow 0$ в точку y . Пусть x^* — замкнутая однородная точка, лежащая над x . Зафиксируем такие координаты пространства A^n , что действие группы G_m , индуцированное морфизмом λ , будет в них диагональным. Тогда

$$\mu^{(1)}(x, \lambda) = \{\max(-r_i); \quad i \text{ таковы, что } x_i^* \neq 0\},$$

где $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$. Кроме того, справедливы следующие эквивалентности: специализация в пространстве A^n множества $\sigma^*(\lambda(\alpha), x^*)$ при $\alpha \rightarrow 0$

не существует $\Leftrightarrow \mu(x, \lambda) > 0$,

существует $\Leftrightarrow \mu(x, \lambda) \leq 0$,

равна точке $(0) \Leftrightarrow \mu(x, \lambda) < 0$.

Доказательство. Пусть $\mu_1 = \mu(x, \lambda)$ и $\mu_2 = \max\{-r_i; x_i^* \neq 0\}$. Точка $\sigma^*(\lambda(\alpha), x^*)$ имеет координаты

$$(\alpha^{r_1} \cdot x_1^*, \dots, \alpha^{r_n} \cdot x_n^*).$$

Следовательно, множество $\alpha^{\mu_2} \cdot x^*$ имеет в пространстве A^n при $\alpha \rightarrow 0$ конечную ненулевую специализацию y^* . Итак, последнее утверждение становится очевидным, если доказать, что $\mu_1 = \mu_2$. С другой стороны, поскольку множество $\alpha^{\mu_1} \cdot x^*$ имеет в простран-

стве A^n ненулевую специализацию, эта специализация лежит над некоторой точкой из P_{n-1} , которая должна быть специализацией множества $\sigma(\lambda(\alpha), x)$. Таким образом, точка y^* лежит над y . Если $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$, то видим, что $y_i^* = 0$, если $x_i^* = 0$ или $r_i > -\mu_2$. Следовательно,

$$\sigma^*(\lambda(\alpha), y^*) = \alpha^{-\mu_2} \cdot y^*.$$

Иначе говоря, тривиальному действию группы G_m на точку y и G_m -линеаризации ограничения пучка $\mathcal{O}(1)$ в точку y соответствует линейное представление на конусе $\{\beta \cdot y^*; \beta \in k\}$, лежащем над точкой y , вида

$$\alpha: y^* \rightarrow \alpha^{-\mu_2} \cdot y^*.$$

Аффинная прямая, проходящая через y^* , канонически изоморфна линейному расслоению над точкой y , отвечающему пучку $\mathcal{O}(1) \otimes \kappa(y)$. Как мы видели в § 3 гл. 1, G -линеаризации пучка $\mathcal{O}(1)$ над неподвижной точкой y соответствует характер

$$\chi(\alpha) = \alpha^{-\mu_2}$$

группы G_m . Согласно определению 2.2, $\mu_2 = \mu_1$. $\square$

Фиксируем следующие обозначения:

$R = k[[t]]$ (кольцо формальных степенных рядов от t),

$K = k((t))$ (поле частных кольца R).

Нас будут интересовать группы R - и K -значных точек редуктивной группы G . Положим

$G(R) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(R), G)$ (группа R -значных точек),

$G(K) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(K), G)$ (группа K -значных точек).

Отметим, что благодаря естественному морфизму $\text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(R)$ группа $G(R)$ является подгруппой в $G(K)$. Имеется, кроме того, естественное отображение $\bar{\omega}$ из $G(R)$ в G_k , индуцированное морфизмом $\text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(R)$. На классическом языке подгруппа $G(R)$ состоит из тех точек $\phi \in G(K)$, которые имеют специализацию в группе G , когда $t \in K$ специализируется в 0. Этой специализацией будет $\bar{\omega}(\phi)$.

Если λ есть 1Р-подгруппа группы G , то она определяет каноническую K -значную точку группы G . Ее можно записать как композицию

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(K) & \xrightarrow{A} & \mathbf{G}_m \xrightarrow{\lambda} G \\ & \Downarrow & \\ & & \operatorname{Spec} k[\alpha, \alpha^{-1}] \end{array}$$

в которой отображение A определяется в свою очередь k -гомоморфизмом

$$\begin{aligned} \tilde{A}: k[\alpha, \alpha^{-1}] &\rightarrow K \\ \tilde{A}(\alpha) &= t. \end{aligned}$$

Отметим, что, когда точка t специализируется в 0, α также специализируется в 0. Полученная точка из $G(K)$ будет обозначаться через $\langle \lambda \rangle$. Теперь мы в состоянии сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА (Ивахори). Пусть G — редуктивная алгебраическая группа над полем k . Каждый двойной класс смежности группы $G(K)$ по подгруппе $G(R)$ содержит точку вида $\langle \lambda \rangle$, где λ — некоторая 1Р-подгруппа.

В действительности Ивахори доказал это в [17] для более общих колец R и для «Тохоки»-групп (или присоединенных групп) Шевалле. Результат очевиден, когда G — расширение тора с помощью конечной группы, т. е. для любой редуктивной группы в характеристике p . Пусть, с другой стороны, характеристика равна нулю, и пусть $\pi: G \rightarrow G'$ — гомоморфизм группы G в присоединенную к ней группу. Ввиду условия на характеристику морфизм π гладок и индуцированное отображение $G(R) \rightarrow G'(R)$ сюръективно, ибо R — гензелево локальное кольцо. Отправляясь теперь от K -значной точки группы G и умножая ее слева и справа на R -значные точки, видим, что можно считать, что ее образ в группе G' является K -значной точкой подгруппы $\lambda(\mathbf{G}_m) \subset G'$. Исходная точка группы G становится тогда K -значной точкой подгруппы $\pi^{-1}(\lambda(\mathbf{G}_m))$. Так как последняя — расши-

рение тора с помощью конечной группы, а для таких групп результат справедлив, получаем теорему для группы G^1).

Используем полученный результат в последнем шаге доказательства:

(i) отображение ψ_{x^*} не является собственным в том и только том случае, когда для некоторой нетривиальной 1Р-подгруппы λ группы G существует специализация множества $\sigma^*(\lambda(\alpha), x^*)$ при $\alpha \rightarrow 0$,

(ii) точка (0) принадлежит замыканию орбиты $O(x^*)$ в том и только том случае, когда для некоторой 1Р-подгруппы λ группы G множество $\sigma^*(\lambda(\alpha), x^*)$ специализируется при $\alpha \rightarrow 0$ в точку (0) .

Доказательство. Оба утверждения «в том случае» очевидны. Рассмотрим теперь утверждение «только в том» в (i). Допустим, что отображение ψ_{x^*} не является собственным. На основании нормировочного критерия собственности (EGA 2, § 7) существует такая K -значная точка $\phi: \text{Spec}(K) \rightarrow G$, которая не получается ни из какой R -значной точки группы G , но точка $\psi_{x^*} \circ \phi$ есть R -значная точка схемы A^n . Мы знаем, что по теореме Ивахори точка ϕ имеет вид

$$\phi = \psi_1 \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \psi_2,$$

где λ — некоторая 1Р-подгруппа группы G , а $\psi_1, \psi_2 \in G(R)$. Более того, подгруппа λ нетривиальна, ибо ϕ не является R -значной точкой группы G . Пусть $b_i \in G_k$ суть k -значные точки $\bar{\omega}(\psi_i)$, получающиеся из точек ψ_i , когда t специализируется в 0. Выбирая в пространстве A^n подходящие координаты, можно считать, что группа $b_2^{-1} \cdot \lambda \cdot b_2$ действует на A^n диагональным образом. Предположим, что действие эле-

¹⁾ Вероятно, этот результат верен также для любых полупростых групп в характеристике p . Наш способ сводить теорему не проходит, однако, для несепарабельных изогений. Между прочим, в случае $G = GL(n)$ теорема была доказана Гильбертом в [9]. Наша теорема 2.1 является по существу развитием его идей, высказанных в этой прекрасной работе. [См. гл. 4 книги Дьедонне и Керрола. — Перев.]

мента $b_2^{-1} \cdot \lambda(\alpha) \cdot b_2$ при $\alpha \in (G_m)_k$ задается матрицей $(\alpha^{r_i} \cdot \delta_{ij})$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{x^*} \circ \phi &= \sigma^*(\phi, x^*) = \\ &= \sigma^*[(\psi_1 \cdot b_2) \cdot (b_2^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot b_2) \cdot (b_2^{-1} \cdot \psi_2), x^*]. \end{aligned}$$

(Здесь k -значные точки схем G и A^n отождествляются с теми K -значными точками, которые получаются из них при расширении базы $K \supset k$.)

Поскольку σ^* — групповое действие, имеем

$$\begin{aligned} \sigma^*((\psi_1 \cdot b_2)^{-1}; \psi_{x^*} \cdot \phi) &= \\ &= \sigma^*[(b_2^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot b_2); \sigma^*(b_2^{-1} \cdot \psi_2; x^*)]. \quad (*) \end{aligned}$$

Но $(\psi_1 \cdot b_2)^{-1}$ есть R -значная точка группы G , а $\psi_{x^*} \cdot \phi$ является R -значной точкой схемы A^n ; следовательно, левая часть в (*) будет R -значной точкой схемы A^n .

Если A — кольцо и f — некоторая $\text{Spec}(A)$ -значная точка схемы A^n , то обозначим через $X_i(f)$ элемент кольца A , являющийся ее i -й координатой. Вспоминая тогда определение точки $\langle \lambda \rangle$ и тот факт, что преобразование $b_2^{-1} \cdot \lambda \cdot b_2$ диагонально, перепишем соотношение (*) в координатах:

$$X_i\{\sigma^*((\psi_1 b_2)^{-1}; \psi_{x^*} \circ \phi)\} = t^{r_i} \cdot X_i\{\sigma^*(b_2^{-1} \cdot \psi_2; x^*)\}. \quad (*)'$$

В частности,

$$X_i\{\sigma^*(b_2^{-1} \cdot \psi_2; x^*)\} \in t^{-r_i} \cdot R. \quad (A)$$

Но $b_2^{-1} \psi_2$ есть R -значная точка группы G , специализация которой при $t \rightarrow 0$ совпадает с единицей $e \in G$. Следовательно, $\sigma^*(b_2^{-1} \psi_2, x^*)$ есть R -значная точка схемы A^n , специализация которой при $t \rightarrow 0$ равна x^* . Итак, при некоторых $Z_i \in R$

$$X_i\{\sigma^*(b_2^{-1} \psi_2, x^*)\} = X_i(x^*) + t(Z_i). \quad (B)$$

Соединяя (A) и (B), находим, что $r_i \geq 0$, как только $X_i(x^*) \neq 0$. Таким образом, $\mu(x, b_2^{-1} \cdot \lambda \cdot b_2) \leq 0$ и в силу предложения 2.3 утверждение (i) доказано.

Утверждение «только в том случае» в п. (ii) доказывается аналогично. Предположим, что точка (0) принадлежит замыканию орбиты $O(x^*)$. В качестве первого шага построим такую K -значную точку ϕ группы G , что точка (0) будет специализацией образа морфизма $\psi_{x^*} \circ \phi$ при $t \rightarrow 0$. Запишем ϕ точно так же, как и выше, и получим равенство $(*)'$. Теперь левая часть из $(*)'$ будет принадлежать уже $t \cdot R$, ибо множество $\sigma^*((\psi_1 b_2)^{-1}, \psi_{x^*} \circ \phi)$ специализируется при $t \rightarrow 0$ в точку (0). Следовательно, вместо (A) получаем

$$X_i \{ \sigma^*(b_2^{-1} \psi_2, x^*) \} \in t^{-r_i+1} \cdot R. \quad (\tilde{A})$$

Утверждение (B) будет таким же, как и раньше, и соединяя $(\tilde{A})$ и (B), находим, что $r_i > 0$, как только $X_i(x^*) \neq 0$. Итак, $\mu(x, b_2^{-1} \cdot \lambda \cdot b_2) < 0$ и утверждение (ii) доказано. $\square$

Вторым применением теоремы Ивахори является

Предложение 2.4. Пусть редуктивная алгебраическая группа G над полем k действует с помощью отображения σ на алгебраической схеме X над полем k . Действие группы будет собственным в том и только том случае, когда для любой нетривиальной $1P$ -подгруппы $\lambda: G_m \rightarrow G$ собственным является индуцированное действие группы G_m на схеме X .

Доказательство. Необходимость очевидна. Чтобы показать достаточность, допустим, что действие группы G не является собственным, т. е. не будет собственным морфизм $\Psi: G \times X \rightarrow X \times X$. В силу нормировочного критерия собственности существуют тогда такие K -значные точки ϕ и ξ соответственно схем G и X , что $\Psi(\phi \times \xi)$ будет R -значной точкой схемы $X \times X$, а $\phi \times \xi$ не будет R -значной точкой схемы $G \times X$. Иными словами, ξ и $\sigma(\phi, \xi)$ суть R -значные точки схемы X , но точка ϕ не является R -значной точкой группы G . Согласно теореме Ивахори, можно написать

$$\phi = \psi_1 \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \psi_2,$$

где ψ_1 и ψ_2 являются R -значными точками группы G , а λ — некоторая $1P$ -подгруппа. Кроме того, подгруппа λ нетривиальна, ибо ϕ не является R -значной точкой схемы G . Но тогда точки

$$\xi' = \sigma(\psi_2, \xi)$$

и

$$\sigma(\langle \lambda \rangle, \xi') = \sigma(\psi_1^{-1}, \sigma(\phi, \xi))$$

будут R -значными точками схемы X . Иначе говоря, K -значная, но не R -значная точка $\langle \lambda \rangle \times \xi'$ схемы $G \times X$ переводится отображением Ψ в R -значную точку схемы $X \times X$. Так как по определению точка $\langle \lambda \rangle$ индуцирована с помощью морфизма $\lambda: G_m \rightarrow G$ некоторой K -значной точкой группы G_m , то полученное означает, что составной морфизм $\Psi \circ (\lambda \times 1_X): G_m \times X \rightarrow X \times X$ не является собственным, т. е. индуцированное действие группы G_m не будет собственным. $\square$

Следствие 2.5. Пусть редуктивная алгебраическая группа G действует на алгебраической предсхеме X . Пусть $L \in \text{Pic}^G(X)$. Тогда группа G действует собственнo на множестве $X_{(0)}^s(L)$.

Доказательство. Можно без потери общности заменить предсхему X на $X_{(0)}^s(L)$. Пучок L будет тогда обилен на X , а X будет схемой. В силу доказанного выше предложения достаточно показать, что для любой нетривиальной $1P$ -подгруппы λ группы G индуцированное действие группы G_m собственнo. Фиксируем некоторую подгруппу λ . Пусть U — открытое множество в X , состоящее из точек, строго стабильных по отношению к индуцированному действию группы G_m . Я утверждаю, что тогда $U = X$. Если x — геометрическая точка схемы X , то существует такая аффинная окрестность X_s точки x , что s — инвариантное сечение пучка L^N и стационарные подгруппы всех точек из X_s нульмерны. Но тогда сечение s инвариантно относительно G_m и действие группы G_m на множестве X_s также замкнуто. Следовательно, x — по определению точка из U .

Итак, существует квазипроективный геометрический фактор X/G_m . Отсюда вытекает, что действие группы G_m на схеме X отделимо и на основании леммы 0.5 оно собственнo. $\square$

§ 3. Применения¹⁾

Рассмотрим функцию $\mu^L(x, \lambda)$ для фиксированного действия группы G на собственной схеме X , фиксированного обильного пучка $L \in \text{Pic}^G(X)$, фиксированной точки $x \in X_k$, но для подгруппы λ , меняющейся среди 1Р-подгрупп некоторого максимального тора $T \subset G$. Мы используем предложение 2.3 для описания функции μ . Именно, для некоторого n существуют такой морфизм

$$\phi: X \rightarrow \mathbf{P}_{n-1},$$

действие группы G на пространстве $\mathbf{P}_{n-1}$ и G -линеаризация пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$, что отображение ϕ G -линейно и при некотором N

$$L^N = \phi^*(\mathcal{O}(1)).$$

Следовательно, $\mu^L(x, \lambda) = \frac{1}{N} \mu^{\mathcal{O}(1)}(\phi(x), \lambda)$.

Как и в § 1, действие группы G на пространстве $\mathbf{P}_{n-1}$ индуцировано некоторым линейным представлением группы G в аффинном конусе $\mathbf{A}^n$ над $\mathbf{P}_{n-1}$. Допустим, что в пространстве $\mathbf{A}^n$ выбраны такие координаты, что представление тора T диагонально. Тогда элемент $\alpha \in T_k$ действует как матрица $\{\chi_i(\alpha) \cdot \delta_{ij}\}$, где $\chi_1, \dots, \chi_n$ — подходящие характеры группы T . Введем пространства

$$\Gamma^{\mathbf{Q}}(T) = \text{Hom}(G_m, T) \otimes \mathbf{Q},$$

$$\Gamma^{\mathbf{R}}(T) = \text{Hom}(G_m, T) \otimes \mathbf{R}.$$

Характеры χ_i индуцируют линейные функционалы $\bar{\chi}_i$ на пространстве $\Gamma^{\mathbf{R}}(T)$, а 1Р-подгруппа λ группы T индуцирует точку $\bar{\lambda} \in \Gamma^{\mathbf{R}}(T)$. Если $(\phi(x_1^*), \dots, \phi(x_n^*))$ —

¹⁾ По причине указанной в предисловии, § 2 и часть § 3 опущены при переводе. — Прим. перев.

координаты однородной точки, лежащей над точкой $\phi(x)$, то предложение 2.3 дает равенство

$$\mu^{(1)}(\phi(x), \lambda) = \max_{\{i; \phi(x_i^*) \neq 0\}} (-\bar{\chi}_i(\bar{\lambda})).$$

Отсюда находим

Предложение 2.14. Пусть редуктивная группа G действует на схеме X , собственной над полем k . Пусть $T \subset G$ — максимальный тор и пучок $L \in \text{Pic}^G(X)$ обилен. Тогда на пространстве $\Gamma^R(T)$ существует конечное число линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$, которые принимают на $\Gamma^Q(T)$ рациональные значения и обладают следующим свойством:

для каждого $x \in X_k$ найдется такое подмножество $I \subset \{1, \dots, n\}$, что для всех 1Р-подгрупп λ тора T выполняется равенство $\mu^L(x, \lambda) = \max_{i \in I} \{l_i(\bar{\lambda})\}$.

Следствие 2.15. Если λ_1 и λ_2 суть 1Р-подгруппы тора T и $x \in X_k$, то

$$\mu^L(x, \lambda_1 \cdot \lambda_2) \leq \mu^L(x, \lambda_1) + \mu^L(x, \lambda_2).$$

Доказательство получается немедленно, если учесть, что $\overline{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2$.

Из результатов, полученных в оставшейся части этого параграфа, отметим следующий. Его доказательство использует развитую в § 2 теорию флаговых комплексов алгебраических групп¹⁾.

Предложение 2.18. Пусть G — редуктивная группа, действующая на алгебраических схемах X и Y . Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть G -линейный морфизм, $L \in \text{Pic}^G(Y)$ и $M \in \text{Pic}^G(X)$. Если пучок M относительно обилен для морфизма f и пучок L обилен на схеме Y , то существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$

$$X_{(0)}^s(M \otimes f^*L^n) \supset f^{-1}\{Y_{(0)}^s(L)\}.$$

¹⁾ Текст, выделенный «звездочками», добавлен при переводе. — Прим. перев.

Цель этой главы состоит в том, чтобы изложить независимо от предыдущей теории исчерпывающий анализ одного специального класса действий. При этом мы руководствуемся двумя побуждениями; первое из них — продемонстрировать, как понятия предстабильности и стабильности работают в характерном и нетривиальном случае, второе — прямым рассмотрением этого случая мы обходим те трудности, которые возникают при распространении предыдущей деятельности на полупростые группы в характеристике p (см. предисловие). Помимо этого мы получаем результат над кольцом целых чисел и, следовательно, а fortiori над любым полем. Это позволит нам в дальнейшем построить так называемые арифметические схемы модулей абелевых многообразий.

В этой главе основное поле нам не понадобится: все схемы, которые мы будем рассматривать, будут конечного типа над $\text{Spec } (\mathbb{Z})$. Под A^n , P_n и $\text{PGL}(n)$ будем подразумевать обычные схемы над $\mathbb{Z}$. Действие, которое мы будем изучать, — это каноническое действие

$$\sigma_m: \text{PGL}(n) \times (P_n)^{m+1} \rightarrow (P_n)^{m+1}$$

проективных преобразований на наборах точек проективного пространства.

§ 1. Предстабильность

Прежде всего построим в пространстве $(P_n)^{m+1}$ большое количество открытых инвариантных аффинных подмножеств. До самого конца $p_0, \dots, p_m$ будут обозначать проекции схемы $(P_n)^{m+1}$ на ее $m+1$

сомножителей. Пусть $L_i = p_i^*(o_P(1))$. К сожалению, пучок $o_P(1)$ не допускает $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризации по отношению к действию группы $\mathbf{PGL}(n)$ на пространстве $\mathbf{P}_n$. Если, однако,

$$\bar{\omega}: \mathbf{SL}(n+1) \rightarrow \mathbf{PGL}(n)$$

— каноническая изогения, то пучок $o_P(1)$ допускает $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризацию по отношению к индуцированному действию группы $\mathbf{SL}(n+1)$. Это следует из того, что действие группы $\mathbf{SL}(n+1)$ на аффинном конусе над пространством $\mathbf{P}_n$ совместимо с действием группы $\mathbf{PGL}(n)$ на $\mathbf{P}_n$. Полученная линеаризация индуцирует для каждого i $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризацию пучка L_i (по отношению к индуцированному действию группы $\mathbf{SL}(n+1)$) и, следовательно, аналогичную линеаризацию любого произведения

$$\bigotimes_{i=0}^m L_i^{r_i}.$$

С другой стороны, $(n+1)$ -я степень $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризации пучка $o_P(1)$, которая является линеаризацией пучка $o_P(n+1)$, получается с помощью отображения $\bar{\omega}$ из некоторой $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризации (см. гл. 1, § 2). Таким образом, $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризация пучка

$$\bigotimes_{i=0}^m L_i^{r_i}$$

будет $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризацией, если $n+1$ делит все числа r_i .

Во всяком случае, с помощью этих линеаризаций можно определить инвариантные сечения любого пучка $\bigotimes_{i=0}^m L_i^{r_i}$. Чтобы построить такие инвариантные сечения, обозначим через $X_0, \dots, X_n$ канонические сечения пучка $o_P(1)$ над пространством $\mathbf{P}_n$. Пусть

$$X_i^{(j)} = p_j^*(X_i)$$

— индуцированные сечения пучка L_j .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Введем для всевозможных наборов $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ целых чисел, для которых $0 \leq \alpha_i \leq m$, сечения

$$D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = \det_{0 \leq i, j \leq n} [X_i^{(\alpha_j)}]$$

пучка $L_{\alpha_0} \otimes \dots \otimes L_{\alpha_n}$, получаемые заменой в определителе умножения на тензорное произведение. Очевидно, что $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ — инвариантное сечение пучка $L_{\alpha_0} \otimes \dots \otimes L_{\alpha_n}$. Необращение подходящих сечений D в нуль определяет интересующие нас открытые множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. R -разбиением множества $\{0, 1, \dots, n\}$ называется такое упорядоченное множество подмножеств $S_1, S_2, \dots, S_v$ в $\{0, 1, \dots, n\}$, что

(i) при $2 \leq i \leq v$ множество $S_i \cap (S_{i-1} \cup \dots \cup S_2 \cup S_1)$ состоит в точности из одного целого числа,

$$(ii) \bigcup_{i=1}^v S_i = \{0, 1, \dots, n\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Если задано R -разбиение $R = \{S_1, \dots, S_v\}$, то $U_R \subset (\mathbf{P}_n)^{n+v+1}$ — открытое подмножество, выделяемое условиями

(i) $D_{0, 1, \dots, n} \neq 0$,
(ii) для всех k , заключенных между 1 и v , и всех $i \in S_k$

$$D_{0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, n, n+k} \neq 0.$$

Множество U_R не только аффинно, но и вся структура действия на нем группы $\mathbf{PGL}(n)$ описывается явным образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $R = \{S_1, \dots, S_v\}$ есть R -разбиение множества $\{0, 1, \dots, n\}$. Предположим, что группа $\mathbf{PGL}(n)$ действует на схеме $\mathbf{PGL}(n) \times \mathbf{A}^{nv-n}$ как произведение левых сдвигов на первом сомножителе и тривиального действия на аффинном пространстве. Тогда существует $\mathbf{PGL}(n)$ -линейный изоморфизм

$$U_R \cong \mathbf{PGL}(n) \times \mathbf{A}^{nv-n}. \quad (*)$$

Таким образом, схема U_R является глобально тривиальным главным расслоенным пространством относительно действия группы $\mathbf{PGL}(n)$ и с базой $\mathbf{A}^{nv-n}$.

Доказательство. Мы построим морфизмы левой стороны в (*) в правую и обратно, оставляя читателю проверку того, что они взаимно обратны. По построению эти морфизмы будут $\mathbf{PGL}(n)$ -линейными. отождествим прежде всего пространство $\mathbf{A}^{nv-n}$ со схемой

$$\mathbf{A}_R = \text{Spec } \frac{\mathbf{Z}[x_0^{(n+1)}, \dots, x_n^{(n+1)}; x_0^{(n+2)}, \dots, x_n^{(n+2)}; \dots; x_0^{(n+v)}, \dots, x_n^{(n+v)}]}{\text{идеал, порожденный элементами } \{x_i^{(n+k)} - 1; i \in S_k\}}.$$

Это можно сделать, ибо и то, и другое — аффинные пространства размерности $nv - n$. Определим морфизм

$$S_R: \mathbf{A}_R \rightarrow U_R$$

как набор составных отображений

$$S_i: \mathbf{A}_R \xrightarrow{S_R} U_R \subset (\mathbf{P}_n)^{n+v+1} \xrightarrow{p_i} \mathbf{P}_n,$$

в котором отображения S_i находятся из условий (см. EGA 2, 4.2.3)

$$S_i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{O}_A,$$

$$S_i^*(X_j) = \delta_{ij}, \text{ если } 0 \leq i \leq n,$$

$$S_i^*(X_j) = x_j^{(i)}, \text{ если } n+1 \leq i \leq n+v+1.$$

Морфизм $\psi: \mathbf{PGL}(n) \times \mathbf{A}_R \rightarrow U_R$ положим равным $\sigma_{n+v+1} \circ (1_{\mathbf{PGL}(n)} \times S_R)$. Чтобы определить обратный к нему, необходимо

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Если задано R -разбиение $R = \{S_1, \dots, S_v\}$, то обозначим через $\mu(k)$ целое число из множества

$$S_k \cap \{S_{k-1} \cup \dots \cup S_1\},$$

где $2 \leq k \leq v$. Положим $\mu(1)$ равным наименьшему целому из S_1 . Определим $\mu(i)$ при $0 \leq i \leq n$ как наименьшее целое k , для которого $i \in S_k$. Введем,

наконец, частичный порядок на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$, полагая

$$i_1 >_R i_2,$$

если $\kappa(i_1) > \kappa(i_2)$.

Отметим, что для любого i имеется каноническая последовательность целых чисел

$$i >_R \mu(\kappa(i)) >_R \mu(\kappa(\mu(\kappa(i)))) >_R \dots,$$

которая всегда заканчивается членом $\mu(1)$, ибо множество $\{0, 1, \dots, n\}$ конечно. Заметим, что оба числа i и $\mu(\kappa(i))$ принадлежат $S_{\kappa(i)}$, оба числа $\mu(\kappa(i))$ и $\mu(\kappa(\mu(\kappa(i))))$ принадлежат $S_{\kappa(\mu(\kappa(i)))}$ и т. д. Это позволяет принять следующее индуктивное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. $\lambda_{\mu(1)} = 1$,

$$\lambda_j = \lambda_{\mu(\kappa(j))} \frac{D_{0, 1, \dots, \widehat{\mu(\kappa(j))}, \dots, n, n+\kappa(j)}}{D_{0, 1, \dots, \hat{j}, \dots, n, n+\kappa(j)}}$$

для каждого $j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Сечения λ_j являются сечениями пучка $L_j \otimes L_{\mu(1)}^{-1}$ над открытым множеством U_R . Определим теперь морфизм

$$\phi: U_R \rightarrow \mathbf{PGL}(n) \times \mathbf{A}_R$$

через две его компоненты $p_1 \circ \phi$ и $p_2 \circ \phi$. По определению проективная группа $\mathbf{PGL}(n)$ представляет собой открытое аффинное подмножество пространства

$$\mathbf{P}_{n^2+2n} = \mathbf{Proj} \mathbf{Z}[a_{00}, \dots, a_{0n}; a_{10}, \dots, a_{1n}; \dots; a_{n0}, \dots, a_{nn}],$$

в котором $\det(a_{ij}) \neq 0$. Следовательно, морфизм $p_1 \circ \phi$ задается условиями

$$(p_1 \circ \phi)^*(o_{\mathbf{P}}(1)) = L_{\mu(1)},$$

$$(p_1 \circ \phi)^*(a_{ij}) = X_i^{(j)} \otimes (-1)^j \lambda_j^{-1}.$$

Наконец, морфизм $p_2 \circ \phi$ в аффинное пространство строится по формуле

$$(p_2 \circ \phi)^*(x_i^{(n+k)}) = \frac{D_{0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, n, n+k}}{D_{0, 1, \dots, \widehat{\mu(k)}, \dots, n, n+k}} \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_{\mu(k)}}.$$

(Необходимо подчеркнуть, что выражение, стоящее справа, является в действительности сечением пучка $\mathcal{O}_{A_R}$.) Это доказывает по модулю оставшихся механических проверок предложение. $\square$

Что касается морфизмов, построенных в ходе доказательства предложения, то для дальнейшего полезно зафиксировать обозначение

$$\phi_R = p_2 \circ \phi: U_R \rightarrow A^{nv-n}$$

(отождествляя A_R с A^{nv-n}). Пара (A^{nv-n}, ϕ_R) будет тогда геометрическим фактором схемы U_R по группе $\mathbf{PGL}(n)$. Кроме того, будем писать σ_R вместо S_R . Отображение

$$\sigma_R: A^{nv-n} \rightarrow U_R$$

является глобальным сечением морфизма ϕ_R . Очевидно такое

Следствие 3.2. *Допустим, что $U \subset U_R$ — произвольное открытое инвариантное подмножество. Тогда $U \cong \mathbf{PGL}(n) \times \sigma_R^{-1}(U)$ и изоморфизм совместим с очевидными действиями группы $\mathbf{PGL}(n)$.*

Поскольку эти результаты несколько затемняются громоздкой техникой R -разбиений, обратимся для их иллюстрации к случаю $v=1$, $S_1 = \{0, 1, \dots, n\}$. Наше предложение превращается тогда в классический результат о том, что $n+2$ точки «общего» положения в пространстве $\mathbf{P}_n$ могут быть нормализованы единственным проективным преобразованием так, что они станут каноническими точками $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, \dots, 1)$ и $(1, 1, \dots, 1)$. Во втором примере предположим, что $n=2$, $v=2$ и

$$S_1 = \{0, 1\}, \quad S_2 = \{1, 2\}.$$

Предложение тогда утверждает, что если на плоскости заданы пять таких точек P_0, P_1, P_2, P_3 и P_4 , что точки P_0, P_1 и P_2 неколлинеарны, точка P_3 не лежит ни на прямой $\overline{P_0P_2}$, ни на прямой $\overline{P_1P_2}$, точка P_4 не лежит ни на прямой $\overline{P_0P_1}$, ни на прямой $\overline{P_0P_2}$, то подходящим проективным преобразованием их можно

так нормализовать, чтобы точки P_0, P_1, P_2 перешли соответственно в $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, точка P_3 — в $(1, 1, a)$, а точка P_4 — в $(b, 1, 1)$ (см. рис. 3, где $Q_3 = (1, 1, 0)$, $Q_4 = (0, 1, 1)$).

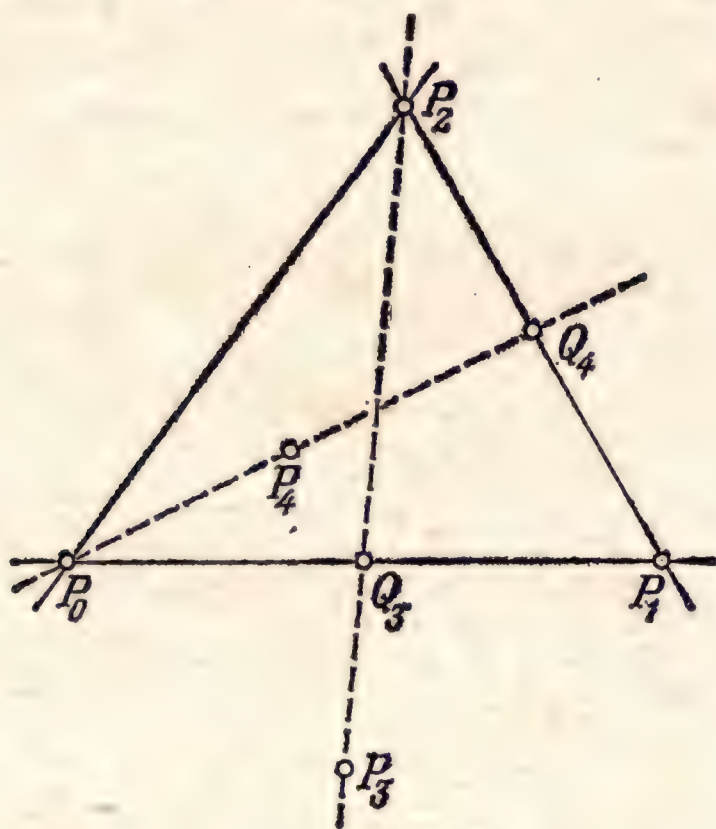


Рис. 3.

Наша следующая цель — показать, что у нас имеется достаточно открытых множеств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Фиксируем целое число m и рассмотрим R -разбиения, для которых $v = m - n$. Пусть U_{reg} — объединение открытых множеств U_R и их образов относительно перестановок сомножителей произведения $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ — геометрическая точка схемы $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$, то следующие условия эквивалентны:

- (1) стационарная подгруппа $S(x)$ нульмерна,
- (2) в пространстве $\overline{\mathbf{P}}_n$ не существует таких непесекающихся собственных линейных подпространств L' и L'' , что каждая точка $x^{(i)}$ принадлежит L' или L'' ,
- (3) x — геометрическая точка множества U_{reg} .

Доказательство. Пусть k — алгебраически замкнутое поле определения точки x . Будем в тече-

ние доказательства писать для простоты $\mathbf{P}_n$ вместо $\mathbf{P}_n \times k$, U_R — вместо $U_R \times k$ и т. д. Во-первых, ясна импликация $(1) \Rightarrow (2)$. В самом деле, можно считать, что в подходящих однородных координатах $\{x_i\}$

$$L' \subset \{X_0 = X_1 = \dots = X_r = 0\},$$

$$L'' \subset \{X_{r+1} = \dots = X_n = 0\}.$$

Тогда группа преобразований вида

$$\begin{array}{c} \overline{} \\ \uparrow \\ r+1 \\ \downarrow \\ \overline{} \\ \uparrow \\ n-r \\ \downarrow \\ \overline{} \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ & \alpha & & 0 \\ \hline 0 & & \beta & 0 \\ & 0 & & \beta \end{array} \right]$$

оставляет точку x на месте. Во-вторых, импликация $(3) \Rightarrow (1)$ есть непосредственное следствие предложения 2.1.

Докажем, что, в-третьих, $(2) \Rightarrow (3)$. В силу (2) все точки $x^{(i)}$ не могут лежать в какой-нибудь одной гиперплоскости и потому из них можно выбрать $n+1$ точек, скажем $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, не лежащих в одной гиперплоскости. Можно без потери общности предположить, что точки $x^{(i)}$ имеют однородными координатами числа $x_j^{(i)} = \delta_{ij}$. Обозначим теперь для каждого целого $n+k$, заключенного между $n+1$ и m , через S'_k — множество таких целых i , что

$$D_{0,1,\dots,\hat{i},\dots,n,n+k} \neq 0,$$

т. е. точка $x^{(n+k)}$ не принадлежит гиперплоскости, порожденной точками $x^{(0)}, \dots, \widehat{x^{(i)}}, \dots, x^{(n)}$. Я утверждаю тогда, что не существует такого разбиения множества $\{0, 1, \dots, n\}$ на два непересекающихся подмножества T' и T'' , что каждое множество S'_k содержится в T' или T'' . Действительно, если это было бы так, то, определяя уравнениями $X_i = 0$ при

всех $i \in T'$ (соответственно $i \in T''$) линейное подпространство L' (соответственно L''), мы получили бы, что все точки $x^{(k)}$ лежат в $L' \cup L''$. Отсюда немедленно получаем, что подходящее множество подмножеств $S_i \subset S'_i$ образует R -разбиение R и $x \in U_R$. $\square$

На основании этого предложения становится ясным, что множество U_{reg} — это в точности множество предстабильных точек схемы $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$ в смысле § 4 гл. 1.

Нашим следующим шагом будет построение геометрического фактора схемы U_{reg} по группе $\mathbf{PGL}(n)$. Пусть $U_1, \dots, U_N$ — открытые подмножества вида U_R в U_{reg} , а также подмножества, получаемые из них перестановками координат. Пусть (Z_i, ϕ_i) — геометрический фактор множества U_i по группе $\mathbf{PGL}(n)$. Пересечение $U_i \cap U_j$ является для всех пар i, j открытым инвариантным подмножеством в U_i и U_j . Если $\sigma_i: Z_i \rightarrow U_i$ — глобальное сечение σ_R морфизма ϕ_i , то в силу следствия 3.2 отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{PGL}(n) \times \sigma_i^{-1}[U_i \cap U_j] &\cong U_i \cap U_j \cong \\ &\cong \mathbf{PGL}(n) \times \sigma_j^{-1}[U_i \cap U_j]. \end{aligned}$$

Иными словами, оба множества $\sigma_i^{-1}[U_i \cap U_j]$ и $\sigma_j^{-1}[U_i \cap U_j]$ суть геометрические факторы схемы $U_i \cap U_j$ по группе $\mathbf{PGL}(n)$. Следовательно, они канонически изоморфны. Используем этот изоморфизм, чтобы склеить схемы Z_i и Z_j . Для любых трех факторов Z_i, Z_j и Z_k получаемые отождествления, очевидно, совместимы. Итак, мы определили предсхему Z и морфизм $\Phi: U_{\text{reg}} \rightarrow Z$. Ясно, что U_{reg} — локально тривиальное главное расслоенное пространство над Z ; а fortiori (Z, Φ) — геометрический фактор схемы U_{reg} по группе $\mathbf{PGL}(n)$. Предсхема Z очень далека, однако, от того, чтобы быть схемой, не говоря уже о квазипроективности.

Хотя предсхема Z и не квазипроективна, на ней имеются разные обратимые пучки. Чтобы исследовать их, используем теорию спуска. В силу SGA 8, § 1, множество обратимых пучков на предсхеме Z

изоморфно множеству обратимых пучков на U_{reg} , наделенных данными спуска относительно морфизма Φ . Но данные Φ -спуска — это в точности то же самое, что и $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризация, ибо

$$U_{\text{reg}} \times_Z U_{\text{reg}} \cong \mathbf{PGL}(n) \times U_{\text{reg}}.$$

Пучки L_i^{n+1} допускают $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризацию, и, следовательно, на Z существует такой обратимый пучок M_i , что

$$L_i^{n+1} \cong \Phi^*(M_i).$$

Кроме того, сечение

$$(D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n})^{n+1} \in \Gamma(U_{\text{reg}}, L_{\alpha_0}^{n+1} \otimes \dots \otimes L_{\alpha_n}^{n+1})$$

инвариантно по отношению к $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризации этого пучка и потому по отношению к его $\mathbf{PGL}(n)$ -линеаризации. Согласно SGA 8, § 1, существует такое сечение $E_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ пучка $M_{\alpha_0} \otimes \dots \otimes M_{\alpha_n}$, что

$$(D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n})^{n+1} = \Phi^*(E_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}).$$

§ 2. Стабильность

В этом параграфе будет показано, что, хотя пучок $M_0 \otimes \dots \otimes M_m$ не обилен на предсхеме Z , которая даже не является схемой, он обилен на достаточно большом открытом подмножестве $Z_0 \subset Z$. Сначала определим подмножество $\Phi^{-1}(Z_0)$ в U_{reg} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7/ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Обозначим через U_{stable} открытое подмножество в $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$, геометрическими точками $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(m)})$ которого будут такие точки, что для каждого собственного линейного подпространства $L \subset \bar{\mathbf{P}}_n$ выполняется неравенство

$$\frac{\text{число точек } x^{(i)} \text{ в } L}{m+1} < \frac{\dim L + 1}{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество всевозможных пар $\{I, n_0\}$, состоящих из подмножества

$I \subset \{0, 1, \dots, m\}$ и целого числа n_0 , заключенного между 0 и $n - 1$ и такого, что

$$\frac{\text{мощность множества } I}{m + 1} \geq \frac{n_0 + 1}{n + 1}.$$

Множество геометрических точек, не удовлетворяющих приведенному выше условию, будет тогда (конечным) объединением по всем $\{I, n_0\}$ множеств, состоящих из тех точек $(x^{(0)}, \dots, x^{(m)})$, для которых

$\{x^{(i)}; i \in I\}$ порождает линейное пространство размерности $\leq n_0$.

Но эти геометрические точки — в точности те точки, для которых обращаются в нуль все $(n_0 + 2) \times (n_0 + 2)$ -миноры матрицы, составленной из координат $\{x_j^{(i)}; 0 \leq j \leq n, i \in I\}$, т. е. те геометрические точки x , в которых обращается в нуль некоторый набор сечений обратимых пучков. Итак, рассматриваемые точки суть геометрические точки замкнутого подмножества в $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$. Множество геометрических точек, нарушающих условие стабильности, будет, следовательно, также множеством точек некоторого замкнутого подмножества. $\square$

Предложение 3.5. $U_{\text{stable}} \subset U_{\text{reg}}$.

Доказательство. Пусть $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(m)})$ — стабильная, но не регулярная геометрическая точка. По условию (2) предложения 3.3 в пространстве $\bar{\mathbf{P}}_n$ найдутся два непересекающихся линейных подпространства L', L'' содержащих все точки $x^{(i)}$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\text{число точек } x^{(i)} \text{ из } L'}{m + 1} + \frac{\text{число точек } x^{(i)} \text{ из } L''}{m + 1} < \\ &< \frac{\dim L' + 1}{n + 1} + \frac{\dim L'' + 1}{n + 1} \quad (\text{в силу стабильности}) = \\ &= \frac{\dim \{\text{линейная оболочка пространств } L', L''\} + 1}{n + 1} \leq 1. \end{aligned}$$

Это противоречие доказывает предложение. $\square$

Основное свойство стабильных геометрических точек заключено в следующем предложении.

Предложение 3.6. Пусть x — геометрическая точка схемы $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$. Тогда точка x стабильна в том и только том случае, когда существуют такие целые $N \geq N_0 > 0$ и такие мономы $P_0, \dots, P_m$ от выражений $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$, что при $0 \leq i \leq m$

- (i) P_i — сечение пучка $L_0^N \otimes \dots \otimes L_i^{N-N_0} \otimes \dots \otimes L_m^N$,
- (ii) $P_i(x) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $E = (\mathbf{R})^{m+1}$ — евклидово пространство размерности $m+1$. Каждому определителю $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ сопоставим следующим образом точку $d_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \in E$:

$$d_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m),$$

$$\varepsilon_i = 0, \quad \text{если } i \notin \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\},$$

$$\varepsilon_i = 1, \quad \text{если } i \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}.$$

По точке d можно построить обратимый пучок, у которого D будет сечением. Более общо, сопоставим каждому моному P от определителей D соответствующую сумму точек d . Введем теперь выпуклый конус C_x , порожденный теми точками $d_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$, для которых $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}(x) \neq 0$, т. е. теми точками, компоненты $x^{(\alpha_0)}, \dots, x^{(\alpha_n)}$ которых не лежат в одной гиперплоскости. Легко видеть, что

$(1, 1, \dots, 1) \in (\text{внутренность конуса } C_x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow$ существуют такие целые $N \geq N_0 > 0$, что положительными целочисленными суммами точек d , порождающими конус C_x , будут точки $(N - N_0, N, \dots, N)$, $(N, N - N_0, \dots, N)$, $\dots$, $(N, N, \dots, N - N_0) \Leftrightarrow$ существуют сечения P_i такие же, как в предложении.

Но, с другой стороны, утверждение $\{(1, 1, \dots, 1) \notin (\text{внутренность конуса } C_x)\}$ эквивалентно существованию на пространстве E такого линейного функционала l , что $l((1, 1, \dots, 1)) = 0$ и $l(d_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) \geq 0$ для любой точки d , порождающей конус C_x . Предпо-

ЛОЖИМ, ЧТО

$$l((Z_0, \dots, Z_m)) = \sum_{i=0}^m \lambda_i Z_i,$$

и допустим временно, что $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$. Следующая лемма является ключевой.

ЛЕММА. Если для некоторого множества чисел $\{\lambda_i\}$, таких, что $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m$ и $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$, выполняются при всех $d_{\alpha_0}, \dots, \alpha_n$, порождающих конус C_x , неравенства $l(d_{\alpha_0}, \dots, \alpha_n) \geq 0$, то эти же неравенства выполняются для некоторого набора чисел $\{\lambda_i\}$ вида

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_\beta &= -(m - \beta), \\ \lambda_{\beta+1} = \dots = \lambda_m &= +(\beta + 1). \end{aligned}$$

Доказательство. Идея состоит в том, что если $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_m$, то можно а priori выбрать определитель $D_{\alpha_0}, \dots, \alpha_n$, отличный от нуля в точке x и

такой, что форма $l(d_{\alpha_0}, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=0}^n \lambda_{\alpha_i}$ принимает свое минимальное значение. Именно, допустим, что

$$(1) \ x^{(0)} = x^{(1)} = \dots = x^{(\beta_1-1)} \neq x^{(\beta_1)},$$

(2) все точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(\beta_2-1)}$ лежат в точности на одной прямой, но точка $x^{(\beta_2)}$ на этой прямой не лежит,

(3) все точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(\beta_3-1)}$ принадлежат в точности одной плоскости, но точка $x^{(\beta_3)}$ этой плоскости не принадлежит и т. д.,

(n) все точки $x^{(0)}, \dots, x^{(\beta_n-1)}$ принадлежат в точности одной гиперплоскости, но точка $x^{(\beta_n)}$ этой гиперплоскости не принадлежит.

Точки $x^{(0)}, x^{(\beta_1)}, \dots, x^{(\beta_n)}$ не лежат в одной гиперплоскости и, следовательно, $D_{0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}(x) \neq 0$; и как только $D_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) \neq 0$, то

$$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq \beta_1, \quad \dots, \quad \alpha_n \geq \beta_n.$$

Таким образом, условие на функционал l состоит в том, что

$$l(d_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \geq 0. \quad (*)$$

Но легко проверить, что множество всех таких $\{\lambda\}$, что $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_m$ и $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$, — это выпуклое множество, порожденное специальным набором $\{\lambda_i\}$, указанным в лемме. Итак, соотношение $(*)$ выполняется для l в том и только том случае, когда оно выполняется для какого-нибудь из экстремальных множеств $\{\lambda_i\}$. $\square$

Отбрасывая предположение $\lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_m$ и вычисляя функцию l в указанном специальном наборе $\{\lambda\}$, находим, что существование сечений P из предложения эквивалентно следующему утверждению.

Если $\{0, 1, \dots, m\} = A \cup B$, где A и B — непересекающиеся множества, то для некоторого $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ имеем

$$(i) \quad D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}(x) \neq 0,$$

$$(ii) \quad \binom{\text{мощность}}{\text{множества } A} \cdot \binom{\text{число элементов}}{\alpha_i \text{ из } B} < \\ < \binom{\text{мощность}}{\text{множества } B} \cdot \binom{\text{число элементов}}{\alpha_i \text{ из } A}.$$

Допустим теперь, что точки $x^{(i)}$, $i \in A$, порождают линейное пространство L размерности n_0 . Тогда или пространство, натянутое на все точки $x^{(i)}$, не совпадает с $\mathbf{P}_n$, и в этом случае точка x неустойчива и сечений P не существует, или можно выбрать такие точки $x^{(\alpha_0)}, \dots, x^{(\alpha_n)}$, содержащие $n_0 + 1$ точек $x^{(i)}$, для которых $i \in A$, что они порождают пространство $\mathbf{P}_n$. Иными словами, если $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}(x) \neq 0$, то максимальное число элементов α_i из множества A равно $n_0 + 1$. Таким образом, неравенство (ii) выполняется для некоторого $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ с $D_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}(x) \neq 0$

в том и только том случае, когда

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{мощность} \\ \text{множества } A \end{array} \right) \cdot (n - n_0) < \\ < \left[m + 1 - \left(\begin{array}{c} \text{мощность} \\ \text{множества } A \end{array} \right) \right] \cdot (n_0 + 1), \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{(\text{мощность множества } A)}{m + 1} < \frac{n_0 + 1}{n + 1}.$$

Теперь видно, что сечения P существуют тогда и только тогда, когда эти неравенства выполняются при всех A , и ясно, что это эквивалентно стабильности точки x . $\square$

Следствие 3.7. Пусть x — стабильная геометрическая точка схемы $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$. Существуют такое R -разбиение R и такая открытая инвариантная аффинная окрестность U_0 точки x , что условие $P \neq 0$, в котором P является при некотором M мономом от сечений D пучка $(L_0 \otimes \dots \otimes L_m)^M$, определяет множество U_0 и $U_0 \subset U_{\text{stable}} \cap U_R$.

Доказательство. Пусть $N \geq N_0 > 0$ и $P_0, \dots, P_m$ — сечения из предложения 3.6. Пусть, кроме того, Q — произведение всех сечений D , для которых $D(x) \neq 0$. Тогда подходящий моном $P = Q^{N_0} \otimes P_0^{r_0} \otimes \dots \otimes P_m^{r_m}$ будет сечением обильного обратимого пучка $(L_0 \otimes \dots \otimes L_m)^M$, так что условие $P \neq 0$ определяет открытую аффинную окрестность точки x . Более того, если $P(y) \neq 0$ для некоторой геометрической точки y схемы $(\mathbf{P}_n)^{m+1}$, то $P_0(y) \neq 0, \dots, P_m(y) \neq 0$ и потому точка y стабильна (предложение 3.6). Наконец, y содержится в любом открытом множестве U_R , содержащем точку x . $\square$

Используем теперь сделанное нами для получения окончательного результата. Пусть (Z, Φ) — геометрический фактор схемы U_{reg} по группе $\mathbf{PGL}(n)$, $Z_0 \subset Z$ — такое открытое подмножество, что $\Phi^{-1}(Z_0) =$

$= U_{\text{stable}}$, и Φ_0 — отображение схемы U_{stable} в схему Z_0 , получаемое ограничением морфизма Φ .

ТЕОРЕМА 3.8. *Пара (Z_0, Φ_0) является геометрическим фактором схемы U_{stable} по группе $\mathbf{PGL}(n)$, причем U_{stable} — локально тривиальное главное расслоенное пространство над схемой Z_0 с группой $\mathbf{PGL}(n)$. Кроме того, пучок $M_0 \otimes \dots \otimes M_m$ обилен на схеме Z_0 , которая, следовательно, квазипроективна.*

Доказательство. Первая часть очевидна. Чтобы получить вторую, достаточно показать, что если y — геометрическая точка схемы Z_0 , то у нее имеется открытая аффинная окрестность вида $(Z_0)_s$ для некоторого сечения s пучка $(M_0 \otimes \dots \otimes M_m)^N$ (см. EGA 2, замечание вслед за теоремой 4.5.2). Пусть x — геометрическая точка схемы U_{stable} , лежащая над точкой y . Открытая окрестность U_0 из следствия 3.7 инвариантна и, значит, имеет вид $\Phi_0^{-1}(V)$, где V — некоторая открытая окрестность точки y . Так как для некоторого R имеется включение $U_0 \subset U_R$, то морфизм $\Phi_0|_{U_0}$ допускает глобальное сечение σ_0 . Поскольку схема U_0 аффинна и $V \cong \sigma_0(V)$ — замкнутая подсхема в U_0 , получаем, что схема V также аффинна. Более того, схема U_0 задается условием $P \neq 0$, в котором P — инвариантное сечение пучка $(L_0 \otimes \dots \otimes L_m)^N$ (для подходящего N). Сечение P^{n+1} индуцировано сечением s пучка $(M_0 \otimes \dots \otimes M_m)^N$ (см. § 1), и условие $s \neq 0$ должно определять подсхему V . $\square$

В этой главе мы используем для построения различных факторов результаты гл. 1 и 2. Тем самым мы в отличие от гл. 3 ограничиваемся случаем характеристики 0. Возьмем в качестве основного поля поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, так что группы $\mathbf{PGL}(n)$ и $\mathbf{SL}(n+1)$ будут редуktивными, а факторы, которые мы построим, столь «универсальными», сколь это возможно. Как и в гл. 1, фиксируем алгебраически замкнутое расширение $\Omega \supset \mathbb{Q}$ и пишем $\bar{X} = X \times_{\mathbb{Q}} \Omega$, если X — алгебраическая схема над полем $\mathbb{Q}$. Кроме того, обычные обозначения $\mathbf{P}_n$, *Grass*, $\mathbf{PGL}(n)$ и т. д. будут относиться к соответствующим схемам над $\mathbb{Q}$.

§ 1. Бинарные формы

Самый простой из всех примеров нашей теории — это действие группы $\mathbf{PGL}(1)$ на пространстве $\mathbf{P}_n$, получаемое при отождествлении $\mathbf{P}_n$ с n -й симметрической степенью прямой $\mathbf{P}_1$, на которой группа $\mathbf{PGL}(1)$ действует каноническим образом. Этот пример совпадает со старой теорией *бинарных форм*, которой усердно занимались во второй половине девятнадцатого столетия. Напомним, что пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(2)$ допускает ровно одну $\mathbf{PGL}(1)$ -линеаризацию (см. § 1.3). Основной задачей этой теории является явное описание схемы

$$(\mathbf{P}_n)^{ss}(\mathcal{O}(2))/\mathbf{PGL}(1).$$

Это на редкость трудное занятие, и полный успех был достигнут лишь при $n \leq 6$, причем случаи $n = 5$ и 6 принадлежат к одним из самых блистательных достижений теории¹⁾.

¹⁾ Для $n = 7$ и 8 были получены неполные результаты, но их сложность была столь ужасающей, что от дальнейших попыток пришлось вскоре отказаться. [См. [50]. — Перев.]

Опираясь на нашу теорию, мы построим хотя бы открытые множества

$$(\mathbf{P}_n)^{ss}(\mathcal{O}(2)) \quad \text{и} \quad (\mathbf{P}_n)^s(\mathcal{O}(2)) = (\mathbf{P}_n)_{(0)}^s(\mathcal{O}(2)).$$

Удобно использовать $\mathbf{PGL}(1)$ -линейный морфизм

$$\bar{\omega}: (\mathbf{P}_1)^n \rightarrow \mathbf{P}_n$$

n -кратного произведения в n -кратное симметрическое произведение. Пусть $p_1, \dots, p_n$ — проекции произведения $(\mathbf{P}_1)^n$ на его сомножители и $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ — геометрическая точка схемы $(\mathbf{P}_1)^n$. Тогда для всех $1\mathbf{P}$ -подгрупп λ группы $\mathbf{PGL}(1)$ имеем

$$\begin{aligned} \mu^{\mathcal{O}(2)}[\bar{\omega}x, \lambda] &= \mu^{\bar{\omega}^*(\mathcal{O}(2))}[x, \lambda] = \mu^{\otimes p_i^*(\mathcal{O}(2))}[x, \lambda] = \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^{p_i^*(\mathcal{O}(2))}[x, \lambda] = \sum_{i=1}^n \mu^{\mathcal{O}(2)}[x^{(i)}, \lambda]. \quad (*) \end{aligned}$$

С другой стороны, действие группы $\lambda(\mathbf{G}_m)$ на прямой $\bar{\mathbf{P}}_1$ устроено так: имеются такие две геометрические точки $y, z \in \bar{\mathbf{P}}_1$, что если $t \in \Gamma(\bar{\mathbf{P}}_1 \setminus z, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1})$ — аффинная координатная функция, равная 0 в точке y и ∞ в точке z , то

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha): (\bar{\mathbf{P}}_1 \setminus z) &\rightarrow (\bar{\mathbf{P}}_1 \setminus z), \\ \lambda(\alpha)^*(t) &= \alpha^r \cdot t, \end{aligned}$$

где r — некоторое положительное целое. Заметим, что если w — произвольная замкнутая точка схемы $\bar{\mathbf{P}}_1$ и $w \neq z$ (соответственно $w = z$), то множество $\sigma(\lambda(\alpha), w)$ специализируется при $\alpha \rightarrow 0$ в точку y (соответственно z). Линейное расслоение, отвечающее пучку $\mathcal{O}(2)$, является касательным расслоением к прямой $\mathbf{P}_1$. Исходя из действия группы $\mathbf{PGL}(1)$, можно найти дифференцированием $\mathbf{PGL}(1)$ -линеаризацию кокасательного расслоения. В самом деле, дифференциал dt будет ненулевым сечением этого расслоения над множеством $\bar{\mathbf{P}}_1 \setminus z$ и под действием преобразо-

вания $\lambda(\alpha^{-1})$ он переходит в дифференциал¹⁾

$$d(\lambda(\alpha)^*t) = \alpha^r \cdot dt.$$

Таким образом, преобразование $\lambda(\alpha)$ действует на слое кокасательного расслоения над точкой y как характер

$$\chi(\alpha) = \alpha^{-r}.$$

Аналогично, на слое над точкой z оно действует как χ^{-1} . Итак,

$$\mu^{(2)}(w, \lambda) = \begin{cases} +r, & w \neq z, \\ -r, & w = z. \end{cases}$$

Соединяя это с (*), получаем

$$\mu^{(2)}(\bar{\omega}x, \lambda) = 2r \left\{ \frac{n}{2} - \left(\begin{matrix} \text{число таких } i, \\ \text{что } x^{(i)} = z \end{matrix} \right) \right\}.$$

На основании теоремы 2.1 можно заключить, что справедливо

Предложение 4.1. *Геометрическая точка схемы P_n , представляемая нульмерным циклом $\mathcal{A}$, стабильна (соответственно полустабильна), если никакая геометрическая точка z схемы P_1 не входит в цикл $\mathcal{A}$ с кратностью, большей или равной $\frac{n}{2}$ (соответственно с кратностью большей чем $\frac{n}{2}$).*

Последнее замечание: как мы видели в гл. 3, открытое множество предстабильных точек схемы $(P_1)^n$ гораздо больше открытого множества стабильных точек. Таким образом, если не ограничиваться квазипроективными схемами, а допустить к рассмотрению и предсхемы, то можно строить факторы большего количества открытых множеств. Для пространства P_n

¹⁾ Пусть $T_\alpha: \bar{P}_1 \rightarrow \bar{P}_1$ — преобразование, индуцированное элементом α . Важно отметить, что обычное отображение T_α^* кокасательного расслоения контравариантно по T_α и ковариантно по $T_{\alpha^{-1}}$.

это, однако, неверно. Множество предстабильных точек равно множеству точек, стабильных по отношению к пучку $\mathcal{O}(2)$. Иначе говоря, множество $(\mathbf{P}_n)^s(\mathcal{O}(2))$ является *единственным максимальным инвариантным открытым множеством* U , для которого существует геометрический фактор (Q, ϕ) по группе $\mathbf{PGL}(1)$ с аффинным морфизмом ϕ . Это вытекает из обращения 1.13, поскольку схема $\mathbf{P}_n$ неособа и ее группа Пикара порождается пучком $\mathcal{O}(1)$. Можно пойти дальше и показать, что если U — такое открытое инвариантное множество в $\mathbf{P}_n$, что у него существует *какой-нибудь* геометрический фактор (Q, ϕ) по группе $\mathbf{PGL}(1)$, то $U \subset (\mathbf{P}_n)^{ss}(\mathcal{O}(2))$. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, переходя к аффинному открытому покрытию схемы Q , что этот факт верен, когда схема Q аффинна. Но

$$\Gamma(Q, \mathcal{O}_Q) \subset \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}),$$

и поэтому группа $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n})$ содержит непостоянные функции. Это означает, что *некоторая* компонента схемы $\mathbf{P}_n \setminus U$ имеет коразмерность 1, т. е. имеется такая инвариантная гиперповерхность D , что $U \subset \subset (\mathbf{P}_n - D)$. Если гиперповерхность D задается инвариантной формой $F \in H^0(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}(N))$, то

$$U \subset (\mathbf{P}_n)_F \subset (\mathbf{P}_n)^{ss}(\mathcal{O}(2)).$$

§ 2. Гиперповерхности

Занимаясь классической теорией инвариантов, математики изучали также так называемую теорию тернарных форм, кватернарных форм и т. д. Более общо,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Классические действия* группы $\mathbf{PGL}(n)$ — это ее действия на линейных системах $|mH|$, т. е. на проективном пространстве одномерных подпространств из $H^0(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(m))$.

Так как $|mH|$ — проективное пространство, стабильность на $|mH|$ может пониматься лишь в одном смысле. В этой ситуации оказывается трудным опи-

сать даже открытое множество стабильных точек, не говоря уже о явном построении фактора по группе $\mathbf{PGL}(n)$ ¹⁾. С другой стороны, для достаточно малых n и m это множество без труда вычисляется. Докажем

Предложение 4.2. *При $m \geq 3$ неособая гиперповерхность пространства $\bar{\mathbf{P}}_n$ представляет в схеме $|mH|$ стабильную геометрическую точку.*

Доказательство. Это утверждение есть следствие существования дискриминанта. Предположим, что F — элемент из $H^0(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}(m))$, т. е. однородная форма степени m от $n+1$ переменных. Тогда имеется такой однородный полином Δ от ее коэффициентов, что Δ обращается в точке F в нуль в том и только том случае, когда гиперповерхность $F=0$ имеет особенность. Дискриминант Δ можно интерпретировать как форму от однородных координат пространства $|mH|$. Поскольку дивизор $\Delta=0$ инвариантен относительно группы $\mathbf{PGL}(n)$, функция Δ также инвариантна. Кроме того, стационарная подгруппа любой неособой гиперповерхности, степень которой не меньше трех, пространства $\bar{\mathbf{P}}_n$ конечна (как подгруппа в $\mathbf{PGL}(n)$). Это следует из несуществования на такой гиперповерхности глобальных векторных полей (см. [20], лемма 14.2). Итак, действие группы $\mathbf{PGL}(n)$ на множестве $|mH|_\Delta$ замкнуто, т. е.

$$|mH|_\Delta \subset |mH|^s. \quad \square$$

Обращаясь к более частным случаям, приведем в следующей таблице сводку результатов.

Читать таблицу следует с помощью словаря:

$\exists$ — существует;

k -кратная касательная к кривой C в точке x — прямая l , которая пересекается с кривой C в точке x с кратностью по меньшей мере k . Для $k=3$ она называется касательной в точке возврата;

¹⁾ Специалисты девятнадцатого века по теории инвариантов дали такое построение только для $n=2$, $m=3$ (случай $m < 3$ тривиален). [См. [50]. — *Перев.*]

Таблица

(n, m)	Не строго стабильна	Не полустабильна
$(1, m)$	$\exists$ точка кратности $\geq \frac{m}{2}$	$\exists$ точка кратности $> \frac{m}{2}$
$(n, 1)$	Всегда	Всегда
$(n, 2)$	Всегда	$\exists$ особая точка
$(2, 3)$	$\exists$ особая точка	$\exists$ тройная точка или точка возврата
$(2, 4)$	$\exists$ тройная точка или вырожденная двойная точка	$\exists$ тройная точка или кривая является кубикой + касательная в точке возврата
$(2, 5)$	$\exists$ особая точка 4-го порядка или тройная точка с единственной касательной 4-го порядка, или тройная точка с одной простой ветвью и одна вырожденная двойная точка	$\exists$ особая точка 4-го порядка или тройная точка с единственной касательной 4-го порядка, или кривая является кватрикой + четырехкратная касательная, проходящая через двойную точку
$(3, 3)$	$\exists$ 1-точка, 2-точка или тройная точка	$\exists$ 1-точка, 2-точка высшего типа или тройная точка

точка возврата — двойная точка кривой, имеющая единственную трехкратную касательную, т. е. точка, касательный конус которой состоит из одной точки;

вырожденная двойная точка (tacnode) — точка возврата, трехкратная касательная которой является в действительности четырехкратной, т. е. точка возврата, которая не разрешается одним квадратичным преобразованием;

2-точка (binode) — двойная точка поверхности, касательный конус которой состоит из двух различных прямых;

1-точка (unode) — двойная точка поверхности, касательный конус которой состоит из одной прямой;

2-точка высшего типа — 2-точка, которая не разрешается одним квадратичным преобразованием.

Из этих примеров становится понятным, что потеря стабильности всегда связана с некоторым «плохим» флагом в пространстве $\mathbf{P}_n$, как это указывалось в гл. 2. Чтобы прояснить технику получения этих результатов, мы приведем подробное рассуждение для случая $(n, m) = (2, 4)$.

Рассмотрим для простоты вместо действия группы $\mathbf{PGL}(2)$ на пространстве $|4H|$ действие группы $\mathbf{SL}(3)$, индуцированное обычной изогенией

$$\bar{\omega}: \mathbf{SL}(3) \rightarrow \mathbf{PGL}(2).$$

Пучок $\mathcal{O}(1)$ допускает тогда $\mathbf{SL}(3)$ -линеаризацию; именно, если считать пространство $H^0(\mathbf{P}_2, \mathcal{O}(4))$ множеством рациональных точек схемы $\mathbf{A}^{15}$, то пространство $\mathbf{A}^{15}$ становится аффинным конусом над пространством $|4H|$. И группа $\mathbf{SL}(3)$ действует в нем как четвертая симметрическая степень представления, двойственного к ее каноническому представлению в пространстве $\mathbf{A}^3$. Вычислим с помощью предложения 2.3 функцию μ .

Фиксируем максимальный тор $T \subset \mathbf{SL}(3)$. Его каноническое действие на пространстве $\mathbf{A}^3$ может быть сделано в подходящих координатах x_0, x_1, x_2 диагональным. Тор T становится тогда группой матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

с определителем 1. Для любого поля K K -значные точки аффинного пространства двойственного представления задаются линейными формами $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ с $a_i \in K$, а K -значные точки аффинного пространства $\mathbf{A}^{15}$ четвертой симметрической степени двойственного представления задаются однородными формами степени 4 с коэффициентами из поля K .

Запишем их:

$$\begin{aligned}
 F = & a_{40}x_1^4 + a_{31}x_1^3x_2 + a_{22}x_1^2x_2^2 + a_{13}x_1x_2^3 + a_{04}x_2^4 + \\
 & + a_{30}x_0x_1^3 + a_{21}x_0x_1^2x_2 + a_{12}x_0x_1x_2^2 + a_{03}x_0x_2^3 + \\
 & + a_{20}x_0^2x_1^2 + a_{11}x_0^2x_1x_2 + a_{02}x_0^2x_2^2 + \\
 & + a_{10}x_0^3x_1 + a_{01}x_0^3x_2 + \\
 & + a_{00}x_0^4
 \end{aligned}$$

Если на такую форму действует K -рациональная точка тора T , задаваемая матрицей $[\alpha_i \cdot \delta_{ij}]_{0 \leq i, j \leq 2}$, то новая форма F' имеет коэффициенты a'_{ij} , где

$$a'_{ij} = (\alpha_0^{i+j-4} \cdot \alpha_1^{-i} \cdot \alpha_2^{-j}) \cdot a_{ij}.$$

Допустим теперь, что λ есть 1Р-подгруппа тора T , имеющая вид

$$\lambda(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{r_2} \end{pmatrix}, \quad r_0 + r_1 + r_2 = 0.$$

Согласно предложению 2.3, если C — кривая четвертой степени на плоскости $\overline{\mathbf{P}}_2$ и F — определяющая ее однородная форма с коэффициентами из Ω , то

$$\mu^{(1)}(C, \lambda) = \max_{\substack{\text{все возможные пары } i, j, \\ \text{для которых } a_{ij} \neq 0}} \{(4 - (i + j))r_0 + ir_1 + jr_2\}. \quad (*)$$

Используем эту формулу, чтобы проверить в нашем случае таблицу. Если кривая C' нестабильна, то для некоторой подгруппы λ число μ меньше или равно 0. Но каждая подгруппа λ сопряжена в группе $\overline{\mathbf{SL}}(3)$ 1Р-подгруппе тора T и даже такой подгруппе, которая задается приведенными выше соотношениями с $r_0 \geq \geq r_1 \geq r_2$. Итак, кривая C' нестабильна тогда и только тогда, когда написанное выше число μ не превосходит нуля для некоторого проективного преобразования C кривой C' и некоторых целых r_i , удовлетворяющих этим соотношениям. Но в силу (*)

неравенство $\mu \leq 0$ влечет за собой равенства $a_{00} = a_{10} = a_{20} = a_{01} = a_{11} = 0$. Кроме того, если $\mu \leq 0$ и $a_{30} \neq 0$ и $a_{02} \neq 0$, то

$$0 \geq \{r_0 + 3r_1\} + \{2r_0 + 2r_2\} = r_0 + r_1,$$

что противоречит нашим предположениям о числах r_i . Если теперь $a_{02} = 0$, то получаем, что $(1, 0, 0)$ — тройная точка кривой C ; если $a_{30} = 0$, то $(1, 0, 0)$ — вырожденная двойная точка кривой C . Обратно, если принять, что кривая C имеет в $(1, 0, 0)$ тройную точку, то $a_{02} = 0$. И если $r_0 = 2$, $r_1 = r_2 = -1$, то

$$\mu = \max_{\substack{\text{всевозможные пары } i, j, \\ \text{для которых } a_{ij} \neq 0}} (8 - 3i - 3j) \leq -1.$$

Если кривая C имеет вырожденную двойную точку в $(1, 0, 0)$, то $a_{30} = 0$ и, полагая $r_0 = 1$, $r_1 = 0$, $r_2 = -1$, находим

$$\mu = \max_{\substack{\text{всевозможные пары } i, j, \\ \text{для которых } a_{ij} \neq 0}} (4 - i - 2j) \leq 0.$$

Тем самым установлен смысл стабильности для кривых четвертой степени.

§ 3. Контрпример

В этом разделе мы рассмотрим контрпример. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что у редуктивных групп $\mathbf{SL}(n)$ существуют такие собственные действия на квазипроективных схемах X , гладких над полем $\mathbf{Q}$, что у схемы X нет никакого геометрического фактора по группе $\mathbf{SL}(n)$, т. е. на основании обращения 1.12 и предложения 0.7 в группе $\text{Pic}^G(X)$ не существует такого пучка L , что $X = X^s(L)$. Следует подчеркнуть, что в любой ситуации такого типа существует аналитическое пространство, представляющее собой фактор аналитического пространства, определяемого схемой X , по аналитической группе $\mathbf{SL}(n)$ (см. Пале [34]). Мораль подобных примеров состоит в том, что понятие стабильной точки

является не топологическим, а чисто алгебраическим¹⁾).

Наш пример принадлежит Нагате [28]. В нем группа $SL(3)$ действует на открытом множестве U схемы $|5H|$ так же, как и в § 2. Геометрические точки множества U — это в точности те плоские кривые C пятой степени, которые

- i) не имеют особых точек четвертого порядка,
- ii) не имеют тройных точек, касательный конус которых состоит только из одной прямой, имеющей пятикратное касание с кривой C ,
- iii) не имеют тройных точек, состоящих из одной простой ветви, и вырожденных двойных точек,
- iv) не имеют компонент, состоящих из прямых.

Нагата доказал, что группа $SL(3)$ действует на множестве U собственнo. Но из результатов § 2 вытекает, что геометрического фактора множества U по группе $SL(3)$ не существует.

§ 4. Семейства линейных подпространств

Следующий пример является обобщением теории гл. 3. На нем основано исследование векторных расслоений над алгебраической кривой, которое я опубликую в другом месте²⁾. Обозначим через $Grass_{k,n}$ схему Грассмана k -мерных линейных подпространств пространства P_n .

Пусть

$$V = [Grass_{k,n}]^N.$$

Мы будем изучать действие группы $PGL(n)$ на схеме V .

¹⁾ Это утверждение автора не совсем точно. Описанная здесь ситуация характерна для ряда задач алгебраической геометрии и привела к появлению так называемых алгебраических пространств. Как показал Шешадри [48], в рассматриваемом случае фактор может существовать в виде алгебраического пространства. — Прим. перев.

²⁾ См. помещенные в конце книги статьи Мамфорда и Шешадри. — Прим. перев.

По техническим причинам удобнее рассматривать индуцированное действие группы $SL(n+1)$. Напомним, что грассманиан представляет собой замкнутую подсхему в пространстве

$$P = \text{Proj } Q [\dots, p_{i_0}, \dots, i_k, \dots],$$

где $i_0 < i_1 < \dots < i_k$ и

$$p_{i_0, \dots, i_k} = x_{i_0} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$$

— координаты Плюккера. Так как группа $SL(n+1)$ действует на аффинном пространстве, координаты которого суть $x_0, \dots, x_n$, то она действует и на аффинном пространстве, координатами которого являются числа p , т. е. на аффинном конусе над пространством P . Таким образом, обратимый пучок $\mathcal{O}_P(1)$ наделяется $SL(n+1)$ -линеаризацией и это же верно для индуцированного им обильного пучка на схеме $Grass_{k,n}$. Будем обозначать последний пучок просто $\mathcal{O}(1)$. Предположим теперь, что L — линейное подпространство в $\bar{P}_n$ размерности k . Соответствующую геометрическую точку схемы $Grass_{k,n}$ обозначим также через L . Возьмем $1P$ -подгруппу λ группы $SL(n+1)$, задаваемую матрицами

$$\lambda(\alpha) = [\alpha^{r_i} \cdot \delta_{ij}]_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Тогда, если $p_{i_0, \dots, i_k}(L)$ — однородные координаты точки L , то из предложения 2.3 получаем, что

$$\mu^{(1)}(L, \lambda) = \max_{\substack{\text{всевозможные } i_0 < i_1 < \dots < i_k, \\ \text{для которых } p_{i_0, \dots, i_k}(L) \neq 0}} (-r_{i_0} - \dots - r_{i_k}). \quad (*)$$

Введем теперь для каждого подмножества $I \subset \{0, 1, \dots, n\}$ линейное подпространство L_I пространства P_n , определяемое уравнениями $x_i = 0$ при всех $i \in I$. Если I состоит точно из $n - k$ целых чисел, то размерность пространства L_I равна k . Кроме того, все плюккеровы координаты точки L_I равны нулю, за исключением одной: именно

$$p_{j_0, j_1, \dots, j_k}(L_I) \neq 0, \text{ если } I \cup \{j_0, \dots, j_k\} = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Из (*) вытекает, следовательно, что в этом случае

$$\mu^{(1)}(L_I, \lambda) = - \sum_{i \notin I} r_i = \sum_{i \in I} r_i. \quad (**)$$

Теперь снова допустим, что L — произвольное линейное подпространство в $\bar{\mathbf{P}}_n$ размерности k , и предположим, что числа r_i удовлетворяют неравенствам

$$r_0 > r_1 > \dots > r_n.$$

Рассмотрим действие преобразования $\lambda(\alpha)$ на пространстве $\mathbf{P}_n$ при $\alpha \rightarrow 0$. Проверка устанавливает, что

(1) точки, не лежащие в гиперплоскости L_n , специализируются в точку $(0, 0, \dots, 1)$,

(2) точки, принадлежащие гиперплоскости L_n , но не $L_{(n-1, n)}$, специализируются в точку $(0, 0, \dots, 1, 0)$,

...

($n-1$) точки прямой $L_{(2, \dots, n)}$, отличные от $L_{(1, 2, \dots, n)}$, специализируются в точку $(0, 1, \dots, 0)$,

(n) точка $L_{(1, 2, \dots, n)} = (1, 0, \dots, 0)$ остается на месте.

Пусть для каждого i , $0 \leq i \leq k$, μ_i — единственное целое число μ , для которого

$$\dim(L \cap L_{(\mu+1, \dots, n)}) = i,$$

$$\dim(L \cap L_{(\mu, \mu+1, \dots, n)}) = i - 1.$$

Отсюда следует, что для каждого i пространство L содержит точку из $L_{(\mu_i+1, \dots, n)} \setminus L_{(\mu_i, \dots, n)}$. Таким образом, специализация пространства L при $\alpha \rightarrow 0$ содержит точку с координатами $x_k = 0$ ($k \neq \mu_i$), $x_{\mu_i} = 1$.

Поскольку эти точки порождают линейное пространство размерности k , получаем, что специализация пространства L при $\alpha \rightarrow 0$ равна L_I , где $I = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{\mu_0, \dots, \mu_k\}$. На основании (**) заключаем, что

$$\begin{aligned} \mu^{(1)}(L, \lambda) &= - \sum_{i=0}^k r_{\mu_i} = \\ &= - \sum_{i=0}^n [\dim L \cap L_{(i+1, \dots, n)} - \dim L \cap L_{(i, \dots, n)}] \cdot r_i, \end{aligned}$$

где слагаемое суммы с $i = n$ полагается равным $[k - \dim L \cap L_{(n)}] r_n$, а слагаемое с $i = 0$ — равным $[\dim L \cap L_{(1, \dots, n)} - (-1)] r_0$. Переставляя, находим, что

$$\mu^{o(1)}(L, \lambda) = -(k+1) \cdot r_n + \sum_{i=0}^{n-1} [\dim L \cap L_{(i+1, \dots, n)} + 1] (r_{i+1} - r_i). \quad (***)_1$$

В силу предложения 2.14 мы знаем, что эта формула должна выполняться, если только предположить, что $r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_n$.

Возьмем теперь геометрическую точку $(L^{(1)}, \dots, L^{(N)})$ схемы $V = [\text{Grass}_{k,n}]^N$. Пусть $o(1)$ обозначает $\mathbf{SL}(n+1)$ -линеаризованный обильный пучок

$$\bigotimes_{i=1}^N p_i^*(o(1)).$$

Так же как и в § 1, заключаем, что

$$\mu^{o(1)}((L^{(1)}, \dots, L^{(N)}), \lambda) = -(k+1) \cdot N \cdot r_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=1}^N \dim L^{(j)} \cap L_{(i+1, \dots, n)} + 1 \right\} \cdot (r_{i+1} - r_i). \quad (***)_N$$

Так как эта формула задает линейную функцию чисел r_i , то ее значения положительны для всех r_i , удовлетворяющих условиям $r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_n$, и $\sum r_i = 0$ в том и только том случае, когда они положительны на экстремальных точках этого множества: $n - p = r_0 = r_1 = \dots = r_p$; $r_{p+1} = \dots = r_n = -(p+1)$.

Итак, $\mu > 0$ для таких r_i тогда и только тогда, когда для всех p выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^N (\dim L^{(i)} \cap L_{(p+1, \dots, n)} + 1) < \frac{(p+1)(k+1)N}{n+1}.$$

Поскольку каждая 1Р-подгруппа λ группы $\overline{\mathbf{SL}(n+1)}$ сопряжена 1Р-подгруппе, которая диагональна и удо-

влетворяет условиям $r_0 \geq \dots \geq r_n$, из теоремы 2.1 получаем

Предложение 4.3. Геометрическая точка $(L^{(1)}, \dots, L^{(N)})$ схемы V строго стабильна (соответственно полустабильна) по отношению к пучку $\mathcal{O}(1)$ в том и только том случае, когда для любого линейного подпространства $L \subset \bar{\mathbf{P}}_n$ выполняется неравенство

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\dim L^{(i)} \cap L + 1)}{N(k+1)} < \frac{\dim L + 1}{n+1}$$

(соответственно аналогичное неравенство с $\leq$).

§ 5. Присоединенное проективное действие

В этом разделе мы лишь укажем связь некоторых результатов Костанта с нашей трактовкой. Предположим, что G — полупростая группа присоединенного типа, т. е. действующая точно на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathbf{P}(\mathfrak{g}^*)$ проективное пространство одномерных подпространств из $\mathfrak{g}$. Нас интересует действие группы G на схеме $\mathbf{P}(\mathfrak{g}^*)$, которое будем называть *присоединенным проективным действием*. Заметим, что пучок $\mathcal{O}(1)$ на пространстве $\mathbf{P}(\mathfrak{g}^*)$ наделен G -линеаризацией, ибо группа G действует на конусе над пространством $\mathbf{P}(\mathfrak{g}^*)$. Один из результатов Костанта — следующее

Предложение 4.4. Пусть x — геометрическая точка схемы $\mathbf{P}(\mathfrak{g}^*)$ и x^* — элемент алгебры Ли, лежащий над x (т. е. элемент алгебры Ли, определенный над полем Ω). Тогда

- (i) точка x стабильна $\Leftrightarrow x^*$ — регулярный полупростой элемент, т. е. x^* лежит в картановской подалгебре и внутри некоторой камеры Вейля.
- (ii) точка x полустабильна $\Leftrightarrow x^*$ — ненильпотентный элемент.

(См. [21] и используйте предложение 2.2.)

§ 6. Пространственные кривые

В этом разделе будет исследоваться свойство стабильности точки Чжоу неособой пространственной кривой. Для простоты мы будем работать над алгебраически замкнутым полем k . Допустим, что, вообще, рассматриваются r -мерные подмногообразия пространства $\mathbf{P}_n$. Как и выше, группа $\mathbf{PGL}(n)$ и ее накрытие $\mathbf{SL}(n+1)$ действуют на схеме $\mathbf{P}_n$, причем действие группы $\mathbf{SL}(n+1)$ индуцировано ее линейным представлением в пространстве

$$V = H^0(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)).$$

Обозначим через $*$ операцию перехода к двойственному векторному пространству. Кососимметризация определяет каноническое отображение

$$\Lambda^{r+1}(V^*) \xrightarrow{\phi_1} \overbrace{V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*}^{(r+1) \times}.$$

Оно индуцирует отображение

$$S^d[\Lambda^{r+1}(V^*)] \xrightarrow{\phi_d} \overbrace{S^d V^* \otimes \dots \otimes S^d V^*}^{(r+1) \times},$$

образ которого обозначим через $V_{d,r}$. Ограничение представления группы $\mathbf{SL}(n+1)$ на векторное пространство $V_{d,r}$ неприводимо. Формы Чжоу представляют собой элементы пространства $V_{d,r}$, а точки Чжоу — это k -рациональные точки схемы $\mathbf{P}(V_{d,r}^*)$, т. е. одномерные подпространства в $V_{d,r}$. Пусть $\check{\mathbf{P}}_n = \mathbf{P}(V^*)$ — проективное пространство, двойственное к $\mathbf{P}_n$. Так как

$$(\check{\mathbf{P}}_n)^{r+1} = \text{Proj} \sum_{d=0}^{\infty} \overbrace{(S^d V^*) \otimes \dots \otimes (S^d V^*)}^{(r+1) \times},$$

то точку Чжоу можно рассматривать как дивизор подходящего типа на схеме $(\check{\mathbf{P}}_n)^{r+1}$. Мы не будем повторять здесь всю процедуру построения формы Чжоу по циклу X размерности r (см., однако, [40]). Нам нужно лишь знать, (i) что образование формы Чжоу перестановочно со специализациями и (ii) форму

Чжоу цикла линейных подпространств. Чтобы вычислить последнюю, введем базис $X_0, \dots, X_n$ пространства V , двойственный базис $U_0, \dots, U_n$ пространства V^* и мономы

$$\bigotimes_{j=0}^r \prod_{i=0}^n [U_i^{(j)}]^{r_{ij}},$$

(где $\sum_{i=0}^n r_{ij} = d$ при всех j), образующие базис пространства

$$\overbrace{(S^d V^*) \otimes \dots \otimes (S^d V^*)}^{(r+1) \times}.$$

Если L_I — линейное пространство, определенное уравнениями $X_i = 0$, $i \in I$, то

$$\begin{aligned} \left[\sum a_k L_{I_k} \right] &= \prod_k \left[\begin{array}{c} \text{форма Чжоу про-} \\ \text{странства } L_{I_k} \end{array} \right]^{a_k} = \\ &= \prod_k \phi_1 \left(\bigwedge_{i \notin I_k} U_i \right)^{a_k} = \prod_k \left[\det_{\substack{0 \leq j \leq r \\ i \notin I_k}} U_i^{(j)} \right]^{a_k}. \end{aligned}$$

Допустим теперь, что λ есть 1Р-подгруппа группы $\mathbf{SL}(n+1)$, задаваемая диагональной матрицей $(a^{r_i} \cdot \delta_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$. Тогда предложение 2.3 показывает, что для соответствующей точки Чжоу и подгруппы λ функция μ имеет вид

$$\mu \left(\sum_k a_k L_{I_k}; \lambda \right) = - \sum_k \sum_{i \notin I_k} a_k \cdot r_i.$$

Если, в частности, P_i — точка $L_{(0 \ 1 \ \dots \ \hat{i} \ \dots \ n)}$, а l_{ij} — прямая, соединяющая точки P_i и P_j , то

$$\mu \left(\sum_k a_k l_{i_k, j_k}; \lambda \right) = - \sum_k a_k (r_{i_k} + r_{j_k}).$$

Перейдем теперь к следующей задаче: в пространстве $\mathbf{P}_n$ дана неособая кривая γ , найти цикл Z пространства $\mathbf{P}_n$, который был бы специализацией при $\alpha \rightarrow 0$ образа кривой γ относительно преобразования $\lambda(\alpha)$. Почти во всех случаях цикл Z будет суммой

прямых $l_{i,j}$, так что мы сможем вычислить функцию $\mu(\gamma; \lambda)$ на основании свойства (iv) § 2.1. Предположим, как и в § 4, что

$$r_0 > r_1 > \dots > r_n,$$

и напомним, что:

|| Точки пространства $L_{(i, i+1, \dots, n)}$, не принадлежащие пространству $L_{(i-1, i, \dots, n)}$, специализируются при $\alpha \rightarrow 0$ в точку P_{i-1} .

Будем предполагать, что кривая γ не содержится ни в какой гиперплоскости. В частности, $\gamma \not\subset L_n$ и почти все точки кривой γ специализируются в P_n .

Довольно ясно, что специализация Z кривой γ зависит только от строения кривой γ в конечном множестве точек $\gamma \cap L_{(n)}$. В самом деле, пусть $\sigma: \mathbf{PGL}(n) \times \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n$ — обычное действие и F_0 — композиция

$$(\mathbf{G}_m \times \gamma) \xrightarrow{\lambda \times I} (\mathbf{PGL}(n) \times \mathbf{P}_n) \xrightarrow{\sigma} \mathbf{P}_n$$

(здесь I обозначает вложение кривой γ в $\mathbf{P}_n$). Рассмотрим группу $\mathbf{G}_m$ как подмножество прямой $\mathbf{A}^1$, получаемое выбрасыванием точки $\alpha = 0$. Морфизм F_0 определяет тогда рациональное отображение F поверхности $\mathbf{A}^1 \times \gamma$ в пространство $\mathbf{P}_n$, фундаментальные точки которого суть

$$\{0\} \times Q_i, \quad \text{где } Q_1 \cup \dots \cup Q_v = I^{-1}(L_{(n)}).$$

Действительно, отображение F является морфизмом в любой такой точке $\{0\} \times Q$, что $I(Q) \notin L_{(n)}$, и его образ равен P_n . Допустим, что как рациональное отображение F задается в точках $\{0\} \times Q_i$ уравнениями $X_0 = f_0, X_1 = f_1, \dots, X_n = f_n$; $f_i \in o_i$, локальному кольцу поверхности $\mathbf{A}^1 \times \gamma$ в точке $\{0\} \times Q_i$. Положим $\mathfrak{A}_i = (f_0, f_1, \dots, f_n)$. Так как $\{0\} \times Q_i$ — изолированная фундаментальная точка отображения F , то идеал $\mathfrak{A}_i$ примарен относительно максимального идеала кольца o_i . Раздуем все идеалы $\mathfrak{A}_i$ (см. EGA 2, § 8.1). Нормализацию получившейся поверхности обозначим через V , и пусть $\bar{\omega}: V \rightarrow \mathbf{A}^1 \times \gamma$ — проек-

ция. Имеется открытое множество $V_0 \subset V$, изоморфное множеству $\mathbf{A}^1 \times \gamma \setminus \bigcup \{0\} \times Q_i$, и такой морфизм F' поверхности V в пространство $\mathbf{P}_n$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{\quad} & V \\ \bar{\omega} \downarrow & & \downarrow F' \\ \mathbf{A}^1 \times \gamma \setminus \bigcup \{0\} \times Q_i & \xrightarrow{F_0} & \mathbf{P}_n \end{array}$$

коммутативна. Специализацию Z кривой γ можно тогда вычислить с помощью морфизма F' . Дело в том, что на поверхности V дивизоры $\{x\} \times \gamma$, $x \in (\mathbf{G}_m)_k$, специализируются при $x \rightarrow 0$ в дивизор Картье $(\alpha)_V$ нулей функции α (α — координата на прямой $\mathbf{A}^1$). Следовательно, $Z = F'((\alpha)_V)$. Дивизор $(\alpha)_V$ является объединением собственного образа кривой $\{0\} \times \gamma$ на поверхности V и дивизоров $\mathcal{E}_i$ с носителями в исключительных кривых $\bar{\omega}^{-1}(Q_i)$. Поскольку отображение F переводит почти все точки из $\{0\} \times \gamma$ в одну точку, то

$$Z = \sum_i F'(\mathcal{E}_i).$$

Чтобы описать циклы $F'(\mathcal{E}_i)$ более явно, удобно ввести представление морфизма I в точках Q_i с помощью формальных степенных рядов. Именно, пусть t_i — униформизирующий параметр в точке Q_i кривой γ . Предположим, что морфизм I задается формулами

$$X_0 = (a_0^{(i)} \cdot t_i^{s_{0,i}}) + \text{высшие члены}, \quad a_0^{(i)} \neq 0,$$

$$X_1 = (a_1^{(i)} \cdot t_i^{s_{1,i}}) + \text{высшие члены}, \quad a_1^{(i)} \neq 0,$$

$$\vdots$$

$$X_n = (a_n^{(i)} \cdot t_i^{s_{n,i}}) + \text{высшие члены}, \quad a_n^{(i)} \neq 0.$$

Так как I — морфизм, $s_{k,i} = 0$ для некоторого k . Итак, через униформизирующие параметры α , t_i точек $\{0\} \times Q_i$ поверхности $\mathbf{A}^1 \times \gamma$ рациональное ото-

бражение F задается в этих точках формулами

$$X_k = a_k^{(l)} \cdot \alpha^{rk} \cdot (t_i^{sk, l} + \text{высшие члены}).$$

Кроме того, $\mathfrak{A}_i = (\alpha^{r_0} \cdot t_i^{s_0, i}, \dots, \alpha^{r_n} \cdot t_i^{s_n, i})$.

Сейчас нам понадобится следующий общий факт.

ЛЕММА. Пусть V_0 — неособая поверхность над полем k и P — ее замкнутая точка. Введем на поверхности V_0 униформизирующие параметры x и y точки P и положим

$$\mathfrak{A} = (x^{r_0} \cdot y^{s_0}, \dots, x^{r_n} \cdot y^{s_n}),$$

где r_i, s_i — целые числа. Пусть для всех положительных рациональных чисел $a = p/q$ (числа p и q взаимно просты) v_a — такое дискретное нормирование ранга 1 с центром в точке P , что

$$v_a \left(\sum a_{ij} x^i \cdot y^j \right) = \min_{a_{ij} \neq 0} (i \cdot p + j \cdot q).$$

Обозначим через V нормализацию поверхности, получаемой из поверхности V_0 раздутием идеала $\mathfrak{A}$. Тогда исключительными дивизорами E_a поверхности V будут в точности те простые дивизоры поля $k(V_0)$, которые соответствуют таким нормированиям v_a , что

$$\left\| \begin{array}{l} \text{наименьшее целое число последователь-} \\ \text{ности чисел } r_i p + s_i q \ (0 \leq i \leq n) \text{ входит} \\ \text{в нее по крайней мере дважды.} \end{array} \right. \quad (*)$$

Кроме того, функция $x^q \cdot y^{-p}$ порождает поле функций на E_a .

Доказательство. Для того чтобы центр нормирования v на поверхности V имел положительную размерность, необходимо и достаточно, чтобы центр этого нормирования на одной из поверхностей

$$\text{Spec } \mathcal{O}_{P, V_0} \left[\frac{x^{r_0} \cdot y^{s_0}}{x^{r_1} \cdot y^{s_1}}, \dots, \frac{x^{r_n} \cdot y^{s_n}}{x^{r_1} \cdot y^{s_1}} \right]$$

был положительной размерности. Так как $v_a(x^{r_i} \cdot y^{s_i}) = r_i p + s_i q$, то условие $(*)$ эквивалентно тому, будет ли нормирование v_a иметь центр положительной

размерности на одной из этих поверхностей. Но я утверждаю, что на поверхности V нет других дискретных нормирований ранга 1, кроме v_a . Чтобы убедиться в этом, перейдем к схеме $\tilde{V}_0 = \text{Spec } \hat{\delta}_{P, V_0}$ ($\hat{}$ обозначает пополнение). Тогда идеал $\mathfrak{A}$ будет инвариантен относительно группы автоморфизмов $(x, y) \rightarrow (\alpha x, \beta y)$ кольца $\hat{\delta}_{P, V_0}$. Но легко проверить, что единственным дискретным нормированием ранга 1, инвариантным относительно этой группы, является v_a . $\square$

Весьма привлекательный способ представить эту лемму состоит в том, чтобы нарисовать на плоскости точки (r_i, s_i) и образовать затем их «многоугольник Ньютона». Тогда для каждой стороны многоугольника Ньютона на поверхности V найдется ровно один исключительный дивизор. [См. рис. 4 на стр. 252. — *Перев.*]

Возвращаясь к вычислению цикла Z , определим его компоненты $F'(\mathcal{E}_i)$, построив многоугольник Ньютона по точкам $(r_k, s_{k,i})$, $0 \leq k \leq n$. Заметим, что если исключить числа r_k , удовлетворяющие некоторым линейным уравнениям, то многоугольник будет состоять из сторон, проходящих лишь через две точки $(r_k, s_{k,i})$. Если принять это, то дивизоры E_a , появляющиеся на поверхности V , отвечают таким нормированиям v_a , что $a = p/q$, и при некоторых e, f

$$(pr_e + qs_{e,i}) = (pr_f + qs_{f,i}) < (pr_k + qs_{k,i}) \quad (k \neq e, f). \quad (*)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (\alpha)_V &= \sum_{\text{такие } a} v_a(\alpha) \cdot E_a + (\text{собственный образ кривой } \{0\} \times \gamma) = \\ &= \sum_{\text{такие } a} p \cdot E_a + (\text{собственный образ кривой } \{0\} \times \gamma). \end{aligned}$$

Чему равен цикл $F'(E_a)$? Как подмножество пространства $\mathbf{P}_n$ он должен быть центром нормирования v'_a , индуцированного на поверхности $F'(V) \subset \mathbf{P}_n$. Согласно (*), это нормирование удовлетворяет соотношениям

$$v'_a(X_e/X_f) = v_a(\alpha^{re} \cdot t_i^{se,i} / \alpha^{rf} \cdot t_i^{sf,i}) = 0,$$

$$v'_a(X_k/X_f) = v_a(\alpha^{rk} \cdot t_i^{se,i} / \alpha^{rf} \cdot t_i^{sf,i}) > 0 \quad (k \neq e, f).$$

Следовательно, его центр — это как раз прямая $l_{e,f}$, соединяющая точки P_e и P_f . Кроме этого, функция

$$(X_e/X_f) = (\alpha^{r_e - r_f}) \cdot (t_i^{s_{e,i} - s_{f,i}})$$

порождает поле функций прямой $l_{e,f}$, а функция $\alpha^q \cdot t_i^{-p}$ — поле на дивизоре E_a . Таким образом, цикл $F'(E_a)$ равен прямой $l_{e,f}$ с кратностью

$$\left| \frac{r_e - r_f}{q} \right| = \left| \frac{s_{e,i} - s_{f,i}}{p} \right|.$$

Собирая все вместе, получаем

$$Z = \sum_{i=1}^v \left\{ \sum_{\substack{\text{пары } (e, f), \\ \text{удовлетворяющие} \\ \text{условию } (*)}} |s_{e,i} - s_{f,i}| \cdot l_{e,f} \right\}.$$

Интерпретируя условие (*) через многоугольник Ньютона и вспоминая, что $r_0 > r_1 > \dots > r_n$, находим, что пары (e, f) , удовлетворяющие соотношению (*), являются в точности последовательными парами чисел e из некоторой последовательности $v_i = e(1) < e(2) < \dots < e(\mu) = n$, в которой v_i — наибольшее целое v , такое, что $s_{v,i} = 0$ (см. рис. 4). Итак, выражение, стоящее в скобках, будет для каждого i цепью прямых линий (с кратностями), соединяющих точки от P_{v_i} до P_n , причем P_{v_i} есть специализация при $\alpha \rightarrow 0$ образа точки Q_i относительно преобразования $\lambda(\alpha)$.

Это дает наглядную картину, согласно которой кривая γ специализируется под действием $\lambda(\alpha)$ в множество циклов, по одному для каждой точки Q из $\gamma \cap L_{(n)}$, каждый из которых такого же типа, что и цикл, получаемый раздутием инфинитезимальной окрестности кривой γ вблизи точки Q .

Соединяя вместе это выражение для цикла Z и предыдущие результаты о числе μ точки Чжоу цикла

прямых, получаем, что

$$\mu(\gamma, \lambda) = - \sum_{i=1}^v \sum_{\substack{\text{пары } (e, f), \\ \text{удовлетворяющие} \\ \text{условию } (*), \\ e > f}} (s_{e,i} - s_{f,i}) \cdot (r_e + r_f)$$

(здесь у функции μ написано γ вместо «точка Чжоу кривой γ »). Слагаемые этой суммы имеют при каждом i

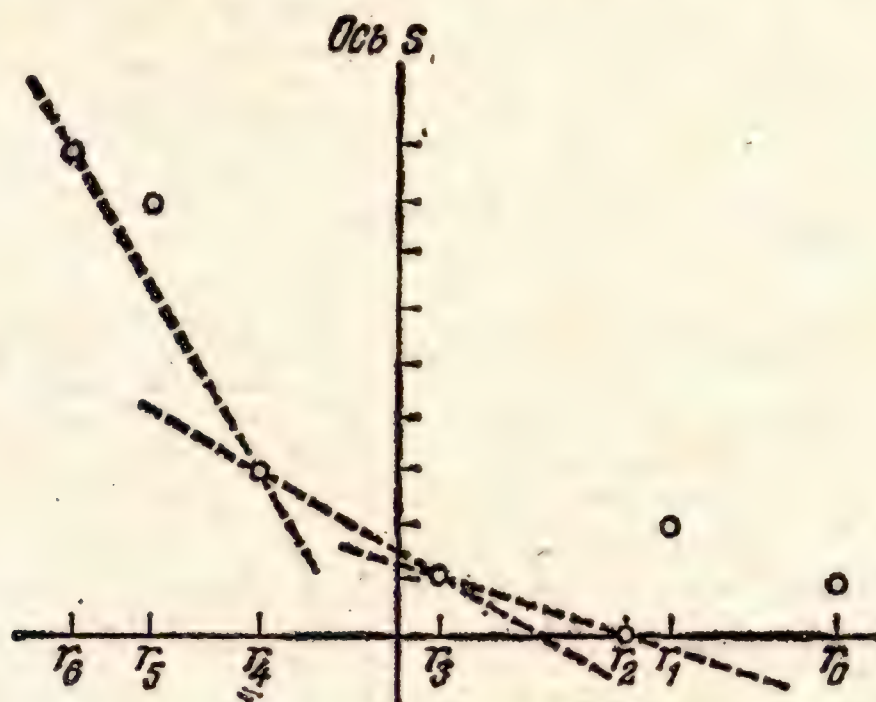


Рис. 4.

Многоугольник Ньютона для

$$X_0 = t + \dots$$

$$X_1 = t^2 + \dots$$

$$X_2 = 1$$

$$X_3 = t + \dots$$

$$X_4 = t^3 + \dots$$

$$X_5 = t^8 + \dots$$

$$X_6 = t^9 + \dots$$

Предельный цикл:

$$Z = l_{23} + 2l_{34} + 6l_{46}$$

очень простую интерпретацию на языке многоугольника Ньютона. Если этот многоугольник повернуть на 90° так, чтобы ось s стала горизонтальной, то интересующее нас слагаемое будет площадью части плоскости, лежащей под многоугольником Ньютона (с учетом знака, т. е. площадь того, что расположено ниже оси s , считается отрицательной). Но многоугольник Ньютона является как раз многоугольником, который минимизирует эту площадь. Следовательно,

функция $\mu(\gamma, \lambda)$ равна

$$= - \sum_{i=1}^v \text{Min}_{\substack{\text{всевозможные} \\ \text{последовательности} \\ v_i = e(1) < e(2) < \dots < e(\mu) = n}} \left[\sum_{j=2}^{\mu} (s_{e(j), i} - s_{e(j-1), i}) \cdot (r_{e(j)} + r_{e(j-1)}) \right].$$

В действительности мы доказали эту формулу только в том случае, когда $r_0 > r_1 > \dots > r_n$ и числа r_i не удовлетворяют некоторому конечному множеству линейных уравнений. На основании предложения 2.14 и вида правой части этого выражения заключаем, что оно выполняется для любой 1Р-подгруппы λ , у которой $r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_n$.

Следующий шаг состоит в перестройке этой формулы для получения *нижней* границы для числа μ . Именно, положим $s'_{k,i} = \min_{e \geq k} (s_{e,i})$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\gamma, \lambda) &= \\ &= - \sum_{i=1}^v \text{Min}_{\substack{\text{всевозможные} \\ \text{последовательности} \\ 0 = k(1) < \dots < k(\mu) = n}} \sum_{j=2}^{\mu} (s'_{k(j), i} - s'_{k(j-1), i}) \cdot (r_{k(j)} + r_{k(j-1)}) \geq \\ &\geq \text{Max}_{\substack{\text{всевозможные} \\ \text{последовательности} \\ 0 = k(1) < \dots < k(\mu) = n}} - \sum_{j=2}^{\mu} \left[\sum_{i=1}^v s'_{k(j), i} - \sum_{i=1}^v s'_{k(j-1), i} \right] \times \\ &\quad \times (r_{k(j)} + r_{k(j-1)}). \end{aligned}$$

Для всех k положим $e_k = \sum_{i=1}^v s'_{k,i}$. Эти числа легко интерпретируются: $s'_{k,i} = I(Q_i; \gamma \cdot H)^1$, где H — «общая» гиперплоскость вида $\sum_{j=k}^n a_j X_j = 0$ и потому

$e_k =$ (кратность пересечения вдоль цикла $L_{(k, k+1, \dots, n)}$ кривой γ и «общей» гиперплоскости H , содержащей пространство $L_{(k, k+1, \dots, n)}$).

¹⁾ $I(Q_i; \gamma \cdot H)$ — индекс пересечения циклов γ и H в точке Q_i . — Прим. перев.

Для того чтобы показать, что полученная нижняя граница в некоторых случаях положительна, нам понадобится один комбинаторный факт.

ЛЕММА. Если целые числа e_i удовлетворяют соотношениям

- i) $e_0 = 0, e_n = n + g, e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_n,$
- ii) $e_i \leq i$ при $i = 0, 1, \dots, n - g,$
- iii) $e_i \leq i + g$ при $i = n - g + 1, \dots, n$

и если $n \geq 2g$ и $g \geq 1$, то

$$\text{Max} \left\{ - \sum_{j=2}^{\mu} (e_{k(j)} - e_{k(j-1)}) \cdot (r_{k(j)} + r_{k(j-1)}) \right\} > 0$$

всевозможные
последовательности
 $0 = k(1) < \dots < k(\mu) = n$

для любых таких вещественных чисел r_i , что $r_0 \geq \dots \geq r_n$,
 $\sum_{i=0}^n r_i = 0$ и не все r_i равны нулю.

Доказательство. Легко проверить, что этот максимум только уменьшится, если заменить числа e_i их верхними границами $e_i = i$ или $i + g$. Обозначим через $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_g$ стоящие в скобках суммы для последовательностей чисел $k(j)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &: 0, 1, \dots, n, \\ \Sigma_1 &: 0, 1, \dots, n - g - 1, n - g + 2, \dots, n, \\ \Sigma_2 &: 0, 1, \dots, n - g - 2, n - g + 3, \dots, n, \\ &\vdots \\ \Sigma_{g-1} &: 0, 1, \dots, n - 2g + 1, n, \\ \Sigma_g &: 0, n. \end{aligned}$$

Умножая числа Σ_i при $0 \leq i \leq g-1$ на $\frac{1}{(g+2i)(g+2i+2)}$, а число Σ_g — на $\frac{1}{3g(n+g)}$ и складывая полученное, видим, что результат равен

$$\frac{1}{3g} (r_{n-2g+1} + r_{n-2g+2} + \dots + r_{n-1} + r_n).$$

Ввиду наших предположений о числах n и r_i , он строго отрицателен. Следовательно, строго отрицательно одно из чисел Σ_i и потому максимум из леммы положителен. $\square$

Тем самым мы подготовились к получению следующего результата:

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть γ — неособая кривая в пространстве $\mathbf{P}_n$. Точка Чжоу кривой γ стабильна по отношению к действию группы $\mathbf{PGL}(n)$, если

i) кривая γ не содержится ни в какой гиперплоскости,

ii) вложение кривой γ в пространство $\mathbf{P}_n$ определяется полной линейной системой,

iii) род g кривой γ равен по меньшей мере 1, а степень по меньшей мере $3g$.

Доказательство. Так как степень кривой γ не меньше $3g$, то ее вложение в пространство $\mathbf{P}_n$ определяется неспециальной линейной системой $|L|$, где L — обратимый пучок на кривой γ и $H^1(\gamma, L) = (0)$. По теореме Римана — Роха эта степень равна $n + g$ и $n \geq 2g$. В силу предыдущей леммы, вычисления функции $\mu(\gamma, \lambda)$ и теоремы 2.1 теорема будет установлена, если доказать такое утверждение:

Пусть задан произвольный флаг $L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{n-1} \subset \mathbf{P}_n$, в котором L_i — линейное пространство размерности i , и пусть e_k — кратность пересечения вдоль цикла L_{k-1} кривой γ и общей гиперплоскости H , содержащей пространство L_{k-1} . Тогда числа e_k удовлетворяют условиям ii) и iii) леммы. (*)

Но (*) — это, по существу, теорема Вейерштрасса о пробелах. Чтобы показать это, рассмотрим k -мерное подпространство $A_k \subset H^0(\gamma, L)$, отвечающее тем гиперплоскостям, которые содержат пространство L_{n-k} . Число e_k будет тогда степенью дивизора D_k базисных точек линейной системы A_{n-k+1} , т. е. подсхемы кривой γ , определяемой уравнениями $s = 0$ при всех $s \in A_{n-k+1}$. Это означает, что пространство $H^0(\gamma, L(-D_k))$ имеет размерность не меньше чем $n - k + 1$,

в то время как степень пучка $L(-D_k)$ равна $n + g - e_k$. В силу теоремы Римана — Роха

$$\begin{aligned} n - k + 1 &\leq \dim H^0(\gamma, L(-D_k)) = \\ &= n - e_k + 1 + \dim H^1(\gamma, L(-D_k)). \end{aligned}$$

Поскольку пучок $L(-D_k)$ имеет глобальные сечения, $\dim H^1(\gamma, L(-D_k))$ не превосходит g . Это доказывает, что $e_k \leq k + g$ при всех k . Более того, если пучок $L(-D_k)$ имеет больше чем $g + 1$ независимых глобальных сечений, то $\dim H^1(\gamma, L(-D_k)) = 0$ и потому из $k \leq n - g$ вытекает $e_k \leq k$. $\square$

Интересная задача состоит в том, чтобы попытаться найти более общие условия, при которых неособая кривая пространства $\mathbf{P}_n$, порождающая его, имеет стабильную точку Чжоу. В противоположность теореме 4.5 это верно также, если $n = 2$ или 3 и род g не меньше 1. В пространстве $\mathbf{P}_4$ существуют, однако, эллиптические кривые с нестабильными точками Чжоу.

ДОПОЛНЕНИЕ

Пусть $V = (\mathbf{P}_n)^m$, т. е. схема V параметризует упорядоченные нульмерные циклы степени m пространства $\mathbf{P}_n$. Точка $x = (x_1, \dots, x_m)$ стабильна относительно вложения Сегре схемы V в том и только том случае, когда для всех линейных подпространств $L \subset \mathbf{P}_n$

$$\frac{\text{Число точек } x_i, \text{ принадлежащих подпространству } L}{\text{полное число точек } x_i} <$$

$$< \frac{\dim L + 1}{n + 1}.$$

Множество стабильных нульмерных циклов образует тогда во всех характеристиках и даже над целыми числами открытое множество $U \subset (\mathbf{P}_n)^m$ и существует квазипроективное пространство орбит $U/\mathrm{PGL}(n)$. В действительности U является *главным расслоенным пространством над схемой $U/\mathrm{PGL}(n)$* . Техника получения этого результата совершенно элементарна.

Я хотел бы проиллюстрировать, как эта простая теорема может быть использована для доказательства существования 1) схемы модулей поляризованных абелевых многообразий и 2) схемы Пикара произвольного многообразия (как это предположил Гротендик)²⁾. Фиксируем прежде всего некоторые обо-

¹⁾ Mumford D., Projective invariants of projective structures and Applications, Proc. Intern. Congress Math. 1962 (Stockholm), Uppsala, 1963, 526—530. В настоящем переводе опущены те разделы доклада Мамфорда, которые вошли без изменений в переведенную часть его книги «Геометрическая теория инвариантов». — Прим. перев.

²⁾ На самом деле ее можно использовать для доказательства гораздо более сильных результатов о существовании относительных схем Пикара.

значения: если $U \subset (\mathbf{P}_n)^m$ — такое же, как и выше, то положим $Q_{n,m} = U/\mathbf{PGL}(n)$. Поскольку U — главное расслоенное пространство над схемой $Q_{n,m}$ с группой $\mathbf{PGL}(n)$, то, исходя из любой схемы X , на которой действует группа $\mathbf{PGL}(n)$, можно построить ассоциированное расслоенное пространство со слоем X . Если, в частности, $X = \mathbf{P}_n$, то обозначим ассоциированное расслоенное пространство через $P_{n,m}$. Пусть $\pi: P_{n,m} \rightarrow Q_{n,m}$ — морфизм расслоений. Легко видеть, что расслоение $P_{n,m}/Q_{n,m}$ имеет m различных сечений $s_i: Q_{n,m} \rightarrow P_{n,m}$, связанных с отображениями, переводящими набор m точек $(x_1, \dots, x_m)$ в точку x_i . Интуитивно схему $P_{n,m}$ вместе с набором сечений (s_i) можно рассматривать как универсальное семейство n -мерных проективных пространств с заданным нульмерным стабильным циклом степени m .

Чтобы упростить рассмотрение проблемы модулей, ограничимся лишь построением квазипроективного многообразия $M_{g,d}$, точки которого «естественным образом» параметризуют множество всех абелевых многообразий A размерности g , наделенных весьма обильным классом дивизоров D , для которого $D^g = d \cdot g!$. По поводу точного смысла выражения «естественным образом» и по поводу замены дивизора D его классом численной эквивалентности см. мою книгу «Геометрическая теория инвариантов»¹⁾. Выберем теперь любое такое n , что характеристика не делит n и $n > d \cdot \sqrt{g!}$. Положим $v = n^2 g$ и рассмо-

¹⁾ Здесь имеется в виду так называемая *грубая* схема модулей. Обозначим через $\mathcal{A}_{g,d}$ функтор из категории схем в категорию множеств, сопоставляющий схеме S множество абелевых схем над S размерности g , наделенных поляризацией указанного в тексте вида. Грубой схемой модулей называется тогда пара, состоящая из такой схемы M и морфизма ϕ функтора $\mathcal{A}_{g,d}$ в представимый функтор $h(S) = \text{Hom}(S, M)$, что для любого алгебраически замкнутого поля K отображение $\phi(\text{Spec } K): \mathcal{A}_{g,d}(\text{Spec } K) \rightarrow h(\text{Spec } K)$ является изоморфизмом и отображение ϕ является универсальным для морфизмов функтора $\mathcal{A}_{g,d}$ в представимые функторы. — Прим. перев.

трим следующее множество:

подмногообразия $A \subset \mathbf{P}_{d-1}$, для которых

- a) $\pi(A)$ состоит из одной точки $q \in Q_{d-1, v}$,
- b) степень многообразия A как подсхемы в $\pi^{-1}(q)$ равна $d \cdot g!$, а размерность равна g ,
- c) многообразие A допускает такую структуру абелева многообразия, что множество точек порядка n совпадает с $\{s_i(q)\}$, $i = 1, 2, \dots, v$.

С одной стороны, это множество естественным образом параметризуется локально замкнутым подмножеством подходящего многообразия Чжоу (см. [40]). С другой стороны, оно изоморфно множеству абелевых многообразий A размерности g , наделенных весьма обильным классом дивизоров D , для которого $D^g = d \cdot g!$, и упорядочением множества точек порядка n . [Именно, можно доказать, что неравенство $n > d \cdot \sqrt{g!}$ влечет за собой, что множество точек порядка n образует стабильный нульмерный цикл пространства $\mathbf{P}_{d-1}$ при вложении, определяемом полной линейной системой $|D|$). Пусть q — класс эквивалентности этого цикла относительно группы $\mathbf{PGL}(d-1)$. Существует тогда единственное отождествление слоя $\pi^{-1}(q)$ с пространством $\mathbf{P}_{d-1}$, содержащим многообразие A , при котором точка $s_i(q)$ соответствует i -й точке порядка n . Многообразие A вкладывается

¹⁾ Оценим число точек порядка n , лежащих в гиперплоскости H . Пусть γ — одномерный цикл на A , проходящий через единичную точку и высекаемый подходящим линейным подпространством в $\mathbf{P}_{d-1}$ коразмерности $g-1$. Если $\lambda: A \rightarrow A$ — умножение на n и $h \subset A$ — гиперплоское сечение плоскостью H , то число точек порядка n , принадлежащих H , не превосходит $(\lambda^{-1}(\gamma) \cdot h)$. Рассматривая все в кольце Чжоу циклов многообразия A , имеем (λ^* — отображение, индуцированное морфизмом λ)

$$n^2(\lambda^* \gamma \cdot h) = (\lambda^* \gamma \cdot \lambda^* h) = \lambda^*(\gamma \cdot h) = n^{2g}(\gamma \cdot h) = n^{2g} \cdot d \cdot g!.$$

Здесь учтено, что, как известно, $\lambda^* h = n^2 h$ и $\deg \lambda = n^{2g}$. Итак,

$$\frac{\text{число точек порядка } n \text{ из } H}{n^{2g}} \leq \frac{d \cdot g!}{n^2} < \frac{1}{d},$$

что и доказывает стабильность. — Прим. перев.

тогда с помощью этого отождествления в $\pi^{-1}(q) \subset \subset P_{d-1, \nu}$. Таким образом, множество всех таких многообразий A , наделенных лишь классом дивизоров D , параметризуется фактором построенного множества по группе перестановок ν элементов. И так как хорошо известно, что такой фактор квази-проективного многообразия существует, то этим решается вся задача.

Чтобы упростить построение схемы Пикара проективного многообразия V , ограничимся лишь конструкцией приведенной и связной схемы Пикара. Наглядно можно сказать, что задача состоит в нахождении многообразия P , точки которого «естественным образом» параметризуют множество классов дивизоров Картье D на многообразии V , которые алгебраически эквивалентны нулю. Но это эквивалентно аналогичной задаче для классов дивизоров Картье D на V , алгебраически эквивалентных некоторому фиксированному весьма обильному дивизору D_0 . Но если дивизор D_0 достаточно обилен и если каждому классу дивизоров D сопоставить морфизм $\phi: V \rightarrow \mathbf{P}_n$, определяемый полной линейной системой $|D|$, то рассматриваемое множество будет изоморфно множеству орбит относительно группы $\mathbf{PGL}(n)$ множества морфизмов $\phi: V \rightarrow \mathbf{P}_n$, алгебраически эквивалентных фиксированному морфизму $\phi_0: V \rightarrow \mathbf{P}_n$. Тем самым мы пришли к задаче рассматриваемого нами типа.

Ее можно свести к уже решенной задаче о нульмерных циклах следующим образом. Выберем в многообразии V достаточно много общих точек $x_1, \dots, x_N$ так, чтобы для любого морфизма $\phi: V \rightarrow \mathbf{P}_n$, алгебраически эквивалентного морфизму ϕ_0 , множество точек $\phi(x_1), \dots, \phi(x_N)$ образовывало стабильный нульмерный цикл пространства $\mathbf{P}_n$ ¹⁾. Рассмотрим теперь следующее множество:

такие морфизмы $\phi: V \rightarrow \mathbf{P}_n$, что

- а) отображение $\pi \circ \phi$ переводит V в некоторую точку $q \in Q_{n, N}$,

¹⁾ Подробности этой конструкции для случая $\dim V = 2$ см в [24]. — Прим. перев.

b) $s_i(q) = \phi(x_i),$

c) отображение ϕ алгебраически эквивалентно как морфизм из V в $\pi^{-1}(q) \cong \mathbf{P}_n$ отображению ϕ_0 .

С одной стороны, это множество параметризуется локально замкнутым подмножеством подходящего многообразия Чжоу (нужно использовать график морфизма ϕ), а с другой стороны, оно изоморфно множеству орбит указанного выше вида.

Приведем теперь другой пример, когда выполняется условие стабильности и имеет место теорема о факторе. Предположим, что характеристика равна нулю, и рассмотрим вместо последовательностей точек пространства $\mathbf{P}_n$ последовательности линейных подпространств любой размерности. Таким образом, если $Grass_{k,n}$ обозначает грассманиан k -мерных линейных подпространств пространства $\mathbf{P}_n$, то речь идет о пространствах орбит типа $(Grass_{k,n})^m / \mathbf{PGL}(n)$. Тогда точка $x = (L_1, \dots, L_m)$ схемы $(Grass_{k,n})^m$ стабильна по отношению к обычному вложению Плюккера грассманиана и вложению Сегре произведения тогда и только тогда, когда для всех линейных подпространств $L \subset \mathbf{P}_n$

$$\frac{\sum_i (\dim(L \cap L_i) + 1)}{\sum_i (\dim L_i + 1)} < \frac{(\dim L + 1)}{(n + 1)}.$$

Согласно основной теореме, стабильные точки образуют открытое множество U и существует пространство орбит $U / \mathbf{PGL}(n)$.

Этот результат можно применить к задаче классификации векторных расслоений над многообразием в точности тем же способом, каким результат о нульмерных циклах был использован в задаче классификации линейных расслоений, т. е. классов дивизоров Картье. Конечно, хорошо известно, что множество векторных расслоений даже над алгебраической кривой не образует делимого пространства; в действительности оно не является даже локально делимым из-за явления «подскока» (jump), отмеченного Кодай-

рой и Спенсером [20]. И снова условие стабильности позволяет преодолеть все трудности. Рассмотрим для простоты лишь векторные расслоения на фиксированной кривой C .

Определение. Векторное расслоение E *стабильно*, если для любого подрасслоения $F \subset E$

$$\deg c_1(F) < \deg c_1(E) \cdot \frac{\operatorname{rank} F}{\operatorname{rank} E},$$

где c_1 — первый класс Чженя.

Иначе говоря, векторное расслоение стабильно, если все его подрасслоения «менее обильны», чем оно само. Чтобы проиллюстрировать условие стабильности, укажем его простейшие свойства:

1) если L — линейное расслоение, то расслоение E стабильно в том и только том случае, когда стабильно расслоение $E \otimes L$,

2) расслоение E стабильно, если и только если стабильно двойственное расслоение $E^\vee$,

3) если E_1 и E_2 — два векторных расслоения, то расслоение $E_1 \oplus E_2$ никогда не является стабильным,

4) линейное расслоение всегда стабильно,

5) если векторное расслоение E ранга 2 нестабильно, то *или* оно изоморфно расслоению $L_1 \oplus L_2$, *или же* в нем существует единственное подрасслоение L , для которого выполняется неравенство определения, если в нем вместо $<$ написать $\geq$, и расслоение E канонически представляется в виде расширения.

Я могу доказать следующую теорему.

Теорема. Множество всевозможных стабильных векторных расслоений ранга r на фиксированной кривой C характеристики нуль «естественным образом» изоморфно множеству точек неособого квазипроективного многообразия $V_r(C)$.

В заключение мне хотелось бы поставить вопрос, который, как мне кажется, является наиболее интересным с точки зрения обобщения обсуждаемых здесь

результатов. Более того, я думаю, что он является основным на пути решения общей проблемы алгебраических модулей поляризованных неособых многообразий. Этот вопрос таков: когда точка Чжоу неособого многообразия $V \subset \mathbb{P}_n$ стабильна (по отношению к обычному проективному вложению многообразия Чжоу)? Может быть более содержательна следующая форма этого вопроса: дано подмногообразие $V \subset \mathbb{P}_n$; когда существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ точка Чжоу многообразия V стабильна по отношению к n -кратному вложению $V \subset \mathbb{P}_N$? У меня нет никаких гипотез на этот счет.

К. С. ШЕШАДРИ

ФАКТОРПРОСТРАНСТВА
ПО РЕДУКТИВНЫМ
АЛГЕБРАИЧЕСКИМ
ГРУППАМ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ
К МОДУЛЯМ
ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ
НА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
КРИВЫХ¹⁾

В течение некоторого времени было известно, что задача построения пространств модулей, например кривых, абелевых многообразий или векторных расслоений на алгебраических кривых, может быть сведена к задаче построения факторпространств по некоторым алгебраическим группам (в отмеченных примерах это проективная группа). В своей книге «Геометрическая теория инвариантов» Мамфорд развил теорию факторпространств и показал, как ее можно применить к приведенным выше задачам о модулях. Его общая теория имеет место, однако, лишь в характеристике нуля и, чтобы перенести ее в произвольную характеристику, он высказал одну гипотезу. В § 1 говорится о некотором продвижении (достигнутом совместно с Мамфордом) на пути к доказательству этой гипотезы. В § 2 приводится резюме наших результатов о модулях векторных расслоений на алгебраических кривых. Интересно отметить, что, в то время как для построения модулей абелевых многообразий (или кривых) теперь имеются независимые методы, в случае векторных расслоений на алгебраических кривых конструкция модулей зависит (по крайней мере в трудных случаях) от теории Мамфорда.

Обозначение. Мы будем работать с алгебраически замкнутым основным полем k . Более систематические рассуждения должны, конечно, относиться к более общим базисным схемам.

¹⁾ Seshadri C. S., Quotient spaces modulo reductive algebraic groups and applications to moduli of vector bundles on algebraic curves, Actes du Congrès Intern. Mathem. 1970 (Nice), Paris, 1971, 479—482. Подробное изложение результатов этого доклада см. [48]. — Прим. перев.

§ 1. Геометрическая редуктивность

Говорят, что аффинная алгебраическая группа G *геометрически редуктивна*, если для любого ее рационального представления в конечномерном векторном пространстве V и любой ненулевой G -инвариантной точки $v \in V$ существует такой G -инвариантный полином f на пространстве V , что $f(v) \neq 0$, $f(0) = 0$, или, эквивалентно, G -инвариантная однородная форма f , для которой $f(v) \neq 0$. Если характеристика основного поля k равна нулю и группа G *редуктивна* (т. е. ее радикал является тором), то из полной приводимости всех представлений группы G заключаем, что она геометрически редуктивна. Легко видеть, что тор геометрически редуктивен в любой характеристике. Гипотеза Мамфорда утверждает, что редуктивная алгебраическая группа геометрически редуктивна. В работе [47] она была доказана для группы $GL(2)$.

Пусть G — геометрически редуктивная алгебраическая группа, действующая на аффинной алгебраической схеме $X = \operatorname{Spec} A$, и X_1, X_2 — два таких замкнутых G -инвариантных подмножества в X , что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Легко видеть, что существует такой G -морфизм $\varphi: X \rightarrow V$, где V — аффинное многообразие, ассоциированное с рациональным G -модулем, что $\varphi(X_1) = 0$ и $\varphi(X_2) = v$, где v — ненулевая G -инвариантная точка из V . Отсюда легко следует, что существует такая функция $f \in A^G$, что $f(X_1) = 0$ и $f(X_2) = 1$. Итак, геометрическая редуктивность эквивалентна делимости непересекающихся замкнутых G -инвариантных подмножеств (в случае аффинных схем).

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, действующая на аффинном пространстве $\mathbb{A}^{n+1}$ посредством рационального линейного представления. Группа G действует тогда на проективном пространстве $\mathbb{P}_n$. Пусть X — замкнутая G -инвариантная подсхема в $\mathbb{P}_n$ и $X = \operatorname{Proj} R$, где R — однородное координатное кольцо схемы X . Будем говорить, что (k -значная) точка $x \in X$ *полустабильна* (соответственно *стабильна*) (по отношению к указанному проективному вложению или

по отношению к обильному линейному расслоению L , определяющему это вложение), если для некоторой точки $\hat{x} \in \hat{X}$ ($\hat{X}$ — конус над X) замыкание G -орбиты, проходящей через точку $\hat{x}$, не содержит точки 0 (соответственно морфизм $G \rightarrow \hat{X}$, задаваемый соотношением $g \rightarrow \hat{x} \circ g$, собствен). Обозначим множества таких точек через $X^{ss} = X^{ss}(L)$ (соответственно $X^s = X^s(L)$).

Пусть X и G — такие же, как и выше. Допустим, кроме того, что группа G *геометрически редуктивна*. Видим тогда, что множество X^{ss} совпадает в точности с множеством точек x , таких, что существует функция $f \in R^G$ с $f(x) \neq 0$ (или, эквивалентно, существует при некотором $n > 0$ сечение $f \in \Gamma(X, L^n)$, для которого $f(x) \neq 0$ и f G -инвариантно). В частности, множество X^{ss} должно быть открытым. Обратно, поскольку G -инвариантные точки схемы X принадлежат множеству X^{ss} , получаем, что это свойство характеризует геометрическую редуктивность. Пусть $Y = \text{Proj } R^G$. Можно показать, что R^G есть k -алгебра конечного типа (см. [29]; если $k = \mathbb{C}$, то это классический результат), так что Y — *проективная алгебраическая схема*. Обозначим через $\varphi: X \rightarrow Y$ рациональный морфизм, определяемый вложением $R^G \subset R$. Морфизм φ *регулярен* в точках множества X^{ss} , и если обозначить также через φ канонический морфизм $X^{ss} \rightarrow Y$, индуцированный морфизмом φ , то можно показать, что 1) φ — сюръективный G -инвариантный аффинный морфизм и $(\varphi_*(\mathcal{O}_X))^G = \mathcal{O}_Y$; 2) φ разделяет непересекающиеся замкнутые G -инвариантные подмножества в X и 3) множество X^s является φ -насыщенным, т. е. в схеме Y существует такое открытое подмножество Y^s , что $X^s = \varphi^{-1}(Y^s)$ и морфизм $X^s \rightarrow Y^s$ является *геометрическим фактором*, т. е. Y^s — пространство орбит схемы X^s относительно группы G . Эти свойства были доказаны, например для случая $k = \mathbb{C}$, в книге Мамфорда [23]; они представляют собой единственные свойства, необходимые для решения проблемы модулей. В дальнейшем мы увидим, что в силу тривиальных соображений эти свойства также характеризуют геометрическую редуктивность. *Итак, геометрическая*

редуктивность группы G эквивалентна существованию хороших факторов $\varphi: X^{ss} \rightarrow Y$ описанного выше типа.

Предположим теперь, что G — редуктивная группа, действующая на схеме X так же, как и выше. Используя технику книги Мамфорда, можно доказать, что 1) X^{ss} , X^s суть G -инвариантные открытые подмножества в X , 2) действие группы G на X^s собственно, т. е. собствен канонический морфизм $X^s \times G \rightarrow X^s \times X^s$, задаваемый соотношением $(x, g) \rightarrow (x, x \circ g)$ (отсюда следует, что пространство орбит X^s/G есть отделимое алгебраическое пространство в смысле Артина), и 3) для пространства X^{ss}/G выполняется обобщенное свойство полноты; последнее означает, что когда, например, $X^{ss} = X^s$, то алгебраическое пространство X^s/G полно. Наши основные результаты таковы:

ТЕОРЕМА 1. Допустим, что $X^{ss} = X^s$. Тогда подходящее кратное линейного расслоения L на схеме X спускается на полное пространство орбит $Y = X^s/G$ и является там обильным расслоением. В частности, схема Y проективна.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $Z = X \times G/B$, где B — борелевская подгруппа полупростой группы G , и $p: Z \rightarrow X$ — каноническая проекция (p есть G -морфизм относительно диагонального действия группы G на Z). На схеме G/B существует такое обильное линейное расслоение M , что при достаточных малых ba^{-1} для обильного линейного расслоения

$$N = aL + bM, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a, b > 0$$

($aL + bM$ обозначает [a -кратное тензорное произведение пучка L] $\otimes$ [b -кратное тензорное произведение пучка M]), выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad p^{-1}(X^s(L)) &\subset Z^s(N), & \text{(ii)} \quad p(Z^{ss}(N)) &\subset X^{ss}(L), \\ \text{(iii)} \quad Z^{ss}(N) &= Z^s(N). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказывается применением критерия Накаи — Мойшезона. Можно без потери общности предполагать, что группа G действует на множестве X^s свободно, что фактор Y существует в кате-

гории алгебраических схем и что расслоение L спускается до линейного расслоения M на схеме Y . Затем доказывается, что если C — замкнутая целостная кривая в Y , то $\deg(M|_C) > 0$, и что если Y — целостная схема размерности n , то $M^n = \underbrace{M \dots M}_{n \text{ раз}} > 0$. Это де-

лается с помощью раздутий гладких точек схемы Y и с использованием функториальных свойств стабильных точек.

Допустим, что $X^s \neq \emptyset$, схема X целостна и имеет *хороший* фактор X^{ss}/G , как в случае, когда группа G геометрически редуктивна. По теореме 1 пространство Z^s/G ($Z^s = Z^s(N)$) является проективным многообразием. Пусть $q: Z^s/G \rightarrow X^{ss}/G$ — канонический морфизм, индуцированный морфизмом p . На основании теоремы 2 заключаем, что морфизм q собствен, сюръективен и что он является равноразмерным расслоением над схемой X^s/G . Используя это, легко заключить, что схема X^s/G квазипроjektивна, даже если не предполагать существование *хорошего* фактора X^{ss}/G . Именно, справедливо такое

Следствие (теоремы 2). Пусть X и G — такие же, как и в теореме 2. Тогда для заданной точки $x \in X^s$ существует при некотором $n > 0$ G -инвариантное сечение $s \in \Gamma(X, L^n)$, для которого $s(x) \neq 0$. Подходящее кратное расслоение L спускается до обильного расслоения на X^s/G .

§ 2. Модули векторных расслоений

Пусть X — гладкая проективная кривая, определенная над полем k . Будем, следуя Мамфорду, говорить, что алгебраическое векторное расслоение V на X *стабильно* (соответственно *полустабильно*), если для любого его собственного подрасслоения $W \subset V$ выполняется неравенство $\frac{\deg W}{\text{rank } W} < \frac{\deg V}{\text{rank } V}$ (соответственно аналогичное неравенство с $\leq$ вместо $<$). Если V — полустабильное векторное расслоение

с $\frac{\deg V}{\operatorname{rank} V} = \alpha$, то легко видеть¹⁾, что существует ряд Жордана — Гёльдера

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots V_i \subset \dots \subset V,$$

в котором расслоения $W_i = V_i/V_{i-1}$ стабильны и $\frac{\deg W_i}{\operatorname{rank} W_i} = \alpha$. Векторное расслоение $\operatorname{gr}(V) = \bigoplus W_i$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Пусть $S(n, \alpha)$ — множество классов эквивалентности полустабильных векторных расслоений V на X , для которых $\operatorname{rank} V = n$ и $\frac{\deg V}{\operatorname{rank} V} = \alpha$, где отношение эквивалентности определено так: $V_1 \sim V_2 \Leftrightarrow \operatorname{gr}(V_1) = \operatorname{gr}(V_2)$. Подмножество $S(n, \alpha)^s$ в $S(n, \alpha)$, образованное классами эквивалентности, содержащими стабильные расслоения, изоморфно как раз множеству классов изоморфизма стабильных векторных расслоений V , для которых $\operatorname{rank} V = n$ и $\frac{\deg V}{\operatorname{rank} V} = \alpha$. Тогда

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k = \mathbb{C}$ и род кривой $X \geq 2$. Тогда на множестве $S(n, \alpha)$ имеется естественная структура нормального проективного многообразия, в которой $S(n, \alpha)^s$ является открытым гладким подмногообразием²⁾.

Заметим, что если $(n, n\alpha) = 1$ ($n\alpha$ — это степень любого расслоения $V \in S(n, \alpha)$), то $S(n, \alpha)^s = S(n, \alpha)$, и, в частности, многообразие $S(n, \alpha)$ будет гладким. Если $n = 2$, то эта теорема была доказана в любой характеристике с использованием геометрической редуцируемости группы $\operatorname{GL}(2)$ [47]. Для произвольного ранга применением теорем 1 и 2 можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 4 (характеристика поля k любая). Пусть род кривой $X \geq 2$. На множестве $S(n, \alpha)^s$ существует

¹⁾ См. статью Шешадри в сборнике «Математика», 13:1 (1969). — Прим. перев.

²⁾ См. переведенный в этом сборнике доклад Мамфорда на конгрессе в Стокгольме и цитированную выше работу Шешадри. — Прим. перев.

естественная структура гладкого квазипроективного многообразия. Если, в частности, $(n, n\alpha) = 1$, то $S(n, \alpha)$ — гладкое проективное многообразие.

Ранее¹⁾ был доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Подлежащее топологическое пространство многообразия $S(n, 0)$ можно отождествить с множеством классов эквивалентности унитарных представлений ранга n фундаментальной группы кривой X . Аналогичное свойство выполняется также и для многообразия $S(n, \alpha)$, если рассматривать унитарные представления ранга n некоторой специальной фуксовой группы Γ , действующей на верхней полуплоскости H и такой, что $X = H/\Gamma$ (род $X \geq 2$).*

Можно спросить, когда на множестве $U(\Gamma, n)$ классов эквивалентности унитарных представлений ранга n фуксовой группы Γ , действующей на верхней полуплоскости H таким образом, что пространство H/Γ имеет конечную меру, имеется естественная «алгебраическая структура»? Если H/Γ компактно, то эта ситуация изучалась в работе автора *Moduli of π -vector bundles over an algebraic curve*, опубликованной в *Questions on algebraic varieties*, С. I. М. Е (1969), III CICLO, стр. 141—260. Кажется, что аналогичные результаты справедливы даже и в более общем случае. Если X — каноническая компактификация пространства H/Γ , то с помощью функтора p_Γ^* (см. цитированную работу) эту задачу можно исследовать алгебраическими методами на X и прийти к ситуации, аналогичной теореме 2. В действительности именно это послужило мотивировкой для получения теоремы 2.

¹⁾ См статью Нарасимхана и Шешадри в сборнике «Математика», 13:1, 1969. — Прим. перев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирман, Магнус (Birman J., Magnus W.), Discriminant and Projective Invariants of Binary Forms, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970), 269—275, Errata, 26 (1973), 85.
2. Борель А., Линейные алгебраические группы, М., «Мир», 1972.
3. Бялыницкий-Бируля (Bialynicki-Birula A.), On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 577.
4. Вайтценбёк (Weitzenböck R.), Invarianttheorie, Groningen, 1923.
5. Ван-дер-Варден (Van der Varden B.), Über die fundamentalen Identitäten der Invarianttheorie, *Math. Ann.*, 95 (1925), 706.
- 5a. —, Reihenentwicklungen und Überschiebungen in der Invarianttheorie insbesondere im quaternären Gebiet, *Math. Ann.*, 113 (1936), 14.
6. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.
7. Винберг Э., Онищик А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли, Изд-во МГУ, М., 1969.
8. Гильберт (Hilbert D.), Über die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, 36 (1890), 473—534.
9. —, Über die vollen Invariantensysteme, *Math. Ann.*, 42 (1893), 313—373.
10. Гротендик (Grothendieck A.), Eléments de géométrie algébrique, Public. Mathem. IHES, N 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.
11. —, Revêtements Etale et Groupe Fundamental, Springer, Berlin, 1971.
12. Гурвиц (Hurwitz A.), Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.*, 1897, 71—90.
13. Гуревич Г., Основы теории алгебраических инвариантов, Гостехиздат, М., 1948.
14. Дьёдонне (Dieudonné J.), La théorie des invariants au XIX siècle, Séminaire Bourbaki, 1970/71, Berlin, Springer, 1972.
15. Зарисский (Zariski O.), Algebraic surfaces, Berlin, Springer, 1972.
16. Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, том 1 и 2, ИЛ, М., 1963.
17. Ивахори, Матсумото (Iwahori N., Matsumoto M.), On some Bruhat decompositions and the structure of Hecke rings of p -adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES, N 25, 1965.
18. Картье (Cartier P.), Isogenies and duality of abelian varieties, *Ann. Math.*, 71 (1960), 315.

19. Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, часть I, ОНТИ, М. — Л., 1937.
20. Кодaira, Спенсер (Kodaira K., Spencer D.), On deformations of complex analytic structures, *Ann. Math.*, 67 (1958), 328—466.
21. Костант (Kostant B.), Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 327—404.
22. Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, «Мир», М., 1972.
23. Мамфорд (Mumford D.), Geometric Invariant theory, Berlin, Springer, 1965. [Русский перевод с сокращениями см. стр. 125—256 настоящего издания.]
24. —, Лекции о кривых на алгебраической поверхности, «Мир», М., 1968.
25. Нагата (Nagata M.), On the 14th problem of Hilbert, *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 766—772.
26. —, On the Fourteenth problem of Hilbert, Lectures in Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1963.
27. —, Complete reducibility of rational representations of a matrix group, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1 (1961), 87.
28. —, Note on orbit spaces, *Osaka Math. J.*, 14 (1962), 21—31.
29. —, Invariants of a group in an affine ring, *J. Math. Kyoto Univ.*, 3 (1964), 369—377.
30. —, Note on semi-reductive groups, *J. Math. Kyoto univ.*, 3 (1964), 379—382.
31. —, Invariants of a group under a semi-reductive action, *J. Math. Kyoto Univ.*, 5 (1966), 171—176.
32. Нагата, Мията (Nagata M., Miyata T.), Remarks on matrix group, *J. Math. Kyoto Univ.*, 4 (1965), 381—384.
33. Нагата, Отсука (Nagata M., Otsuka K.), Some remarks on 14 th problem of Hilbert, *J. Math. Kyoto Univ.*, 5 (1965), 61—66.
34. Пале (Palais R.), On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Ann. Math.*, 73 (1961), 295.
35. Розенлихт (Rosenlicht M.), Toroidal algebraic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 (1961), 984.
36. —, On quotient varieties and the affine imbedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101 (1961), 211—223.
37. —, Tori, operating on projective varieties, *Rendic Mat. e. Applic.*, Ser. 5, 25 (1966), 129—138.
38. Семинар Софус Ли, Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, ИЛ, М., 1962.
39. Фогарти (Fogarty J.), Invariant theory, Benjamin, N. Y., 1969.
40. Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, том III, ИЛ, М., 1955.
41. Шевале (Chevalley C.), Seminaire 1956/1958. Classification des groupes de Lie algebriques, vol. I et 2.
42. —, Seminaire 2, 1958.
43. —, Sur la theorie de la variété de Picard, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), 435.

44. Шешадри (Seshadri C. S.), On a theorem of Wietzenböck in invariant theory, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1 (1962), 403—409.
45. —, Some results on the quotient space by an algebraic group of automorphisms, *Math. Ann.*, 149 (1963), 286—301.
46. —, Quotient space by an abelian variety, *Math. Ann.*, 152 (1963), 185—194.
47. —, Mumford's conjecture for GL (2) and applications, Algebraic geometry (Bombay Colloquim), Oxford, 1969.
48. —, Quotient spaces modulo reductive algebraic groups, *Ann. Math.*, 95 (1972), 511—556, Errata, 96 (1972), 599.
49. Шур (Schur I.), Vorlesungen über Invariantentheorie, Berlin, Springer, 1968.
50. Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften
 - a. Мейер (Meyer A.), Invariantentheorie, IB2, 18—92, 1892.
 - b. Вейтценбёк (Weitzenböck B.), Neuere Arbeiten der Algebraischen Invariantentheorie, III EI, 1922.
- 51 ¹⁾ Паршин А. Н., Давид Гильберт и теория инвариантов, Историко-математические исследования, вып. 20, М., «Наука», 1974.

¹⁾ Добавлено при корректуре.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелев характер 14
 Абсолютный инвариант 15
 Алгебра матриц $M_n(K)$ 23
 Алгебраическая группа 131
 — предсхема 129
 Алгебраическое пространство 269
 Альтернированный тензор 38
 Антисимметризация 37
 Ассоциированное действие группы 13
 Аффинное пространство A^n 127

 Биекция 13
 Бинарные формы 231
 Бисимметрический изоморфизм 28

 Восстановление 20
 Вполне приводимое представление 22, 112

 Геометрическая точка 129
 Геометрический фактор 133
 Геометрически редуцирующая группа 267
 Гессиан 58
 Гиперповерхность 234
 Гипотеза Мамфорда 127, 267
 Главное расслоенное пространство 155
 Градуированная алгебра 72
 Градуированный автоморфизм 72
 Группа Пикара 130
 Групповая алгебра 117
 — предсхема 130

 Двойственное действие алгебраической группы на векторном пространстве 161

 Действие групповой предсхемы 131
 — — — замкнутое 143
 — — — отделимое 143
 — — — свободное 143
 — — — собственное 143
 — группы 73
 Диаграмма Юнга 32

 Замкнутое действие 143

 Изотипическая компонента модуля 111
 Изотипический модуль 110
 Изотипическое разложение модуля 111
 Инвариантное подмножество 13.
 — подпространство 162
 — сечение обратимого пучка 173
 Инвариантный элемент 13, 162

 Категорный фактор 133
 Кватрика 99
 Квинтика 99
 Классические действия 234
 Ковариант 14
 Ковариантные тензоры 49
 Коммутант алгебры 120
 Коника 98
 Конкомитант 14
 Контравариантный тензор 49
 Контрпример Нагаты 74
 Кососимметрический тензор 38
 Критерий Гильберта — Мамфорда 90, 203
 Кубика 99

 Лемма Нагаты 70
 — Шура 108

- Линеаризация обратимого пучка 170
 Линейное действие 14
 — представление 14
 Мера Хаара 118
 Минимальный левый идеал 113
 Многообразие 129
 Многоугольник Ньютона 252
 Модуль 22
 Неприводимое представление 22, 107
 Неприводимый конкомитант 22
 Нуль-форма 89
 Общая линейная группа $GL(n)$ 14, 130
 Одновременный конкомитант 14
 Однопараметрическая подгруппа 90
 Однородные элементы 72
 Оператор Рейнольдса 164
 Орбита 67, 132
 Ортогональная группа $O(n)$ 65
 Отделимое действие 143
 Относительный инвариант 15
 Первая основная теорема теории инвариантов 41, 51
 — частичная поляризация 19
 Первый процесс восстановления 42
 Модуль 107
 Полиномиальное представление 23
 Полиномиальный конкомитант 16
 Полная поляризация 20
 Полупростая алгебра 113
 Полупростой модуль 110
 Полустабильная точка 89, 180
 Полустабильное векторное расслоение 270
 Поляризация 19
 Порядок тензора 49
 — формы 19
 Правило Аронгольда 56
 Предстабильная точка 180
 Представление алгебраической группы 160
 Представление кольца 107
 Принцип Вейля устранимости алгебраических неравенств 16
 Присоединенное проективное действие 244
 Проективная группа $PGL(n)$ 130, 173
 Проективное пространство P^n 127
 Простая алгебра 116
 Простое разложение алгебры 117
 Простой модуль 22, 107
 Простые компоненты алгебры 117
 Прямая сумма семейства модулей 109
 Рациональное линейное представление 22
 Рациональный конкомитант 16
 Редуктивная алгебраическая группа 163
 — группа 22
 Свободное действие 143
 Связная алгебра 72
 Сигнатура тензора 38
 Символический метод 57
 Символическое выражение 43, 57
 Система Юнга 32
 Скобка 41
 Собственное действие 143
 Стабильная пространственная кривая 255
 — точка 180
 Стабильное векторное расслоение 264, 270
 — семейство линейных подпространств 244, 263
 Стабильные точки в $(P^1)^m$ 233
 — — — $(P^n)^m$ 224, 259
 Стационарная подгруппа 132
 Строго стабильная точка 95, 181
 Сумма семейства модулей 109
 Схема Грассмана *Grass* 240, 263

Схема модулей абелевых многообразий 260
 — Пикара 176, 262

Тензорное представление 21
 Теорема Гильберта — Нагаты 68

— Грама 53
 — Гурвица 118
 — Ивахери 208
 — Машке 117
 — Молина 116
 — Молина — Веддербарна —
 Артина 114
 — перестановочности Шура 123

Тернарные формы 97, 236

Топология Зарисского 85

Точка, регулярная по отношению к действию 144

— Чжоу 245

Точки предсхемы 129

Универсально субмерсивный морфизм 134

Универсальный категорный фактор 134

— геометрический фактор 134

Условие коцикла 170

Форма Чжоу 245

Характер 14

Четырнадцатая проблема Гильберта 74

Численный критерий стабильности 90, 203

Число клеток 32

Эквивалентные представления 107

Эквариант 14

Эквивариантный гомоморфизм 73

Эндоморфизм модуля 106

Якобиан 58

G -линейный морфизм 148

$\mu_L(x, \lambda)$ 202

n -арная форма 202

$1P$ -подгруппа 202

Pic^G 173

R -разбиение 217

$X^s(L)$ 181

$X_0^s(L)$ 181

$X^{ss}(L)$ 181

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика	5
--------------------------	---

Ж. ДЬЁДОННЕ, ДЖ. КЕРРОЛ
ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ
Старое и новое

Введение	10
Глава 1. Элементы теории инвариантов	13
§ 1. Понятие инварианта	13
§ 2. Рациональные конкомитанты	16
Глава 2. Рациональные представления общей линейной группы	22
§ 1. Представления линейных групп	22
§ 2. Представления полной линейной группы	27
§ 3. Диаграммы Юнга	31
§ 4. Характеры группы $GL(n, \Omega)$	36
§ 5. Полилинейные инварианты группы $GL(n, \Omega)$	40
§ 6. Инварианты антисимметрических тензоров	45
§ 7. Инварианты смешанных тензоров	49
§ 8. Теорема Грама	52
§ 9. Инварианты n -арных форм. Символический метод	54
§ 10. Инварианты подгрупп группы $GL(n, \Omega)$	61
Глава 3. Теория инвариантов после Гильберта	67
§ 1. Теорема конечности	67
§ 2. Контрпример Нагаты	74
Глава 4. Введение в теорию Гильберта — Мамфорда	82
§ 1. Аффинный случай	82
§ 2. Проективный случай	86
§ 3. Нуль-формы и полустабильные точки	89
§ 4. Критерий Гильберта — Мамфорда	90
§ 5. Примеры	96
§ 6. Применения нуль-форм к задаче явного нахождения инвариантов	100

Приложение. «Дайджест» некоммутативной алгебры	106
Часть I. Простые модули	106
Часть II. Полупростые модули	109
Часть III. Полупростые алгебры	113
Часть IV. Теорема Машке и теорема перестановочности Шура.	117

Д. МАМФОРД

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНВАРИАНТОВ

Из предисловия	126
Глава 0. Предварительные сведения	129
§ 1. Определения	130
§ 2. Первые свойства	134
§ 3. Хорошие и плохие действия	143
§ 4. Дальнейшие свойства	149
Глава 1. Основные теоремы о действиях редуктивных групп	160
§ 1. Определения	160
§ 2. Аффинный случай	165
§ 3. Линеаризация обратимого пучка	170
§ 4. Общий случай	180
§ 5. Функториальные свойства	194
Глава 2. Анализ понятия стабильности	201
§ 1. Численный критерий	202
§ 2. Применения	213
Глава 3. Элементарный пример	215
§ 1. Предстабильность	215
§ 2. Стабильность	224
Глава 4. Дальнейшие примеры	231
§ 1. Бинарные формы	231
§ 2. Гиперповерхности	234
§ 3. Контрпример	239
§ 4. Семейства линейных подпространств	240
§ 5. Присоединенное проективное действие	244
§ 6. Пространственные кривые	245

ДОПОЛНЕНИЕ

Д. Мамфорд. Проективные инварианты проективных структур и их применения	259
К. С. Шешадри. Факторпространства по редуктивным алгебраическим группам и их применения к модулям векторных расслоений на алгебраических кривых	266
§ 1. Геометрическая редуктивность	267
§ 2. Модули векторных расслоений	270
Список литературы	273
Предметный указатель	276

82 коп.



